Mathematatik B

Nachholprüfung Frühjahrssemester 2019

Dr. Reto Schuppli*

05.02.2020

Erzielte Punkte

Bitte frei lassen

Offene Fragen	**(a)**	**(b)**	**(c)**	**(d1)**	**(d2)**	**Total**
Aufgabe 1	(9)	(9)	(8)	(6)	(4)	(36)
MC-Fragen						
Aufgabe 2						(32)
Aufgabe 3						(32)
						(100)

Teil I: Offene Fragen (36 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (36 Punkte)

(a) (9 Punkte)

Ein Produzent stellt zwei Güter her. p_1 bezeichne den Preis pro Mengeneinheit von Gut 1 und p_2 den Preis pro Mengeneinheit von Gut 2. Die Nachfragemengen nach den Gütern in Abhängigkeit des jeweiligen Preises sind:

$$\begin{aligned} \text{Nachfrage nach Gut 1:} \quad x &= 100 - 5\,p_1, \\ \text{Nachfrage nach Gut 2:} \quad y &= 200 - 4\,p_2. \end{aligned}$$

Die Herstellungskosten betragen

$$K(x,y) = x^2 + x\,y + y^2.$$

Gesucht sind die Preise p_1^* und p_2^*, bei denen der Reingewinn, d.h. Erträge minus Kosten, maximal ist. Gehen Sie dabei davon aus, dass die gesamten Nachfragemengen hergestellt werden können.

Weisen Sie nach, dass es sich wirklich um ein Maximum handelt und berechnen Sie auch den maximalen Reingewinn.

Aufgabe 1

(a) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(b) (9 Punkte)

Ein Textilfabrikant bezieht für seine T-Shirt Produktion Baumwolle von zwei verschiedenen Herstellern. Er bezieht x Tonnen Baumwolle des ersten Herstellers und y Tonnen des zweiten Herstellers. Die dadurch entstehenden Beschaffungskosten sind:

$$\begin{aligned} \text{Kosten für Baumwolle des ersten Herstellers:} \quad K_1(x) &= \tfrac{3}{4}\,x^2 + 400, \\ \text{Kosten für Baumwolle des zweiten Herstellers:} \quad K_2(y) &= \tfrac{11}{4}\,y^2 + 10\,y + 300. \end{aligned}$$

Der Textilfabrikant verfolgt als Unternehmensziel die kostenminimale Produktion einer gewissen Anzahl von T-Shirts, für die er insgesamt 100 Tonnen Baumwolle benötigt.

Gesucht sind die Bezugsmengen x^* und y^*, bei denen die Gesamtmenge an benötigter Baumwolle am wenigsten kostet.

Weisen Sie nach, dass es sich wirklich um ein Minimum handelt und berechnen Sie die minimalen Rohstoffkosten.

Aufgabe 1

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(c) (8 Punkte)

Für die Fertigung der Produkte P_1, P_2, P_3 und P_4 werden jeweils die vier Maschinen M_1, M_2, M_3 und M_4 benötigt. Die Fertigungszeiten (pro Einheit des Produktes in Minuten) sind in der nachfolgenden Tabelle zusammengestellt:

	P_1	P_2	P_3	P_4
M_1	10	7	8	4
M_2	5	5	4	11
M_3	8	9	6	6
M_4	10	m	9	4

Jede der Maschinen sei 16 Stunden pro Tag in Betrieb.

Beschreiben Sie den Zusammenhang zwischen den Fertigungszeiten, der Laufzeit der Maschinen pro Tag und den pro Tag gefertigten Einheiten der Produkte in einem Gleichungssystem.

Für welche positive $m > 0$ ist es nicht möglich zu bestimmen, wie viele Einheiten der einzelnen Produkte pro Tag auf den Maschinen gefertigt werden können?

Aufgabe 1

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(d1) (6 Punkte)

Die Eltern von Dora haben für ihre Tochter ein Sparkonto eingerichtet, damit Dora jeweils ihre Sommerferien finanzieren kann. Zu Jahresanfang zahlen die Eltern CHF $5'000$ auf das Konto ein. Dora hebt immer am 1. Juli jeweils $60\,\%$ des vorhandenen Kapitals ab. Die Verzinsung erfolgt am Jahresende anteilsmässig mit $i = 1.25$ % p.a. Ansonsten gibt es keine Kontobewegungen.

Bestimmen Sie eine explizite Formel für den Kontostand V_n am Ende des n-ten Jahres nach Eröffnung des Kontos.

Hinweis:
Anteilsmässig bedeutet, dass ein Betrag, der nur einen Bruchteil x des Jahres auf dem Konto ist, nur den Bruchteil x der jährlichen Zinsen abwirft.

Aufgabe 1

(d2) (4 Punkte)

Die Eltern von Dora haben für ihre Tochter ein Sparkonto eingerichtet, damit Dora jeweils ihre Sommerferien finanzieren kann. Zu Jahresanfang zahlen die Eltern CHF $5'000$ auf das Konto ein. Dora hebt immer am 1. Juli jeweils $60\,\%$ des vorhandenen Kapitals ab. Die Verzinsung erfolgt am Jahresende anteilsmässig mit $i = 1.25\ \%$ p.a. Ansonsten gibt es keine Kontobewegungen.

(*Wichtige Bemerkung:* Wenn Sie Aufgabe **(d1)** nicht lösen konnten, arbeiten Sie mit $V_n = 3440\,(1 - 0.4825^n)$.)

Welchem Wert würde sich V_n nähern, wenn die Eltern und Dora unendlich lange leben würden?

Am Ende welchen Jahres würde der Kontostand V_n CHF $3'400$ erstmals übersteigen?

Aufgabe 1

(d2) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (64 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen und die Anweisungen auf dem Multiple-Choice-Antwortbogen sorgfältig.

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktion $f(x,y)$ habe in (x_0,y_0) einen stationären Punkt, d.h. $f_x(x_0,y_0) = 0$ und $f_y(x_0,y_0) = 0$.

Hinreichend dafür, dass f in (x_0,y_0) ein *lokales Extremum* hat, ist

(a) $f_{xy}(x_0,y_0)f_{yx}(x_0,y_0) - f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) < 0$.

(b) $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2 = 0$.

(c) $f_{xx}(x_0,y_0)f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2 < 0$.

(d) Keine der vorangehenden Bedingungen ist hinreichend für eine lokale Extremstelle in (x_0,y_0).

Aufgabe 2

Frage 2 (3 Punkte)

Die Funktion

$$f(x,y) = x^2\, y$$

hat unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = x + y = 0$$

(a) ein Maximum im Punkt P = (0,0).

(b) ein Minimum im Punkt P = (0,0).

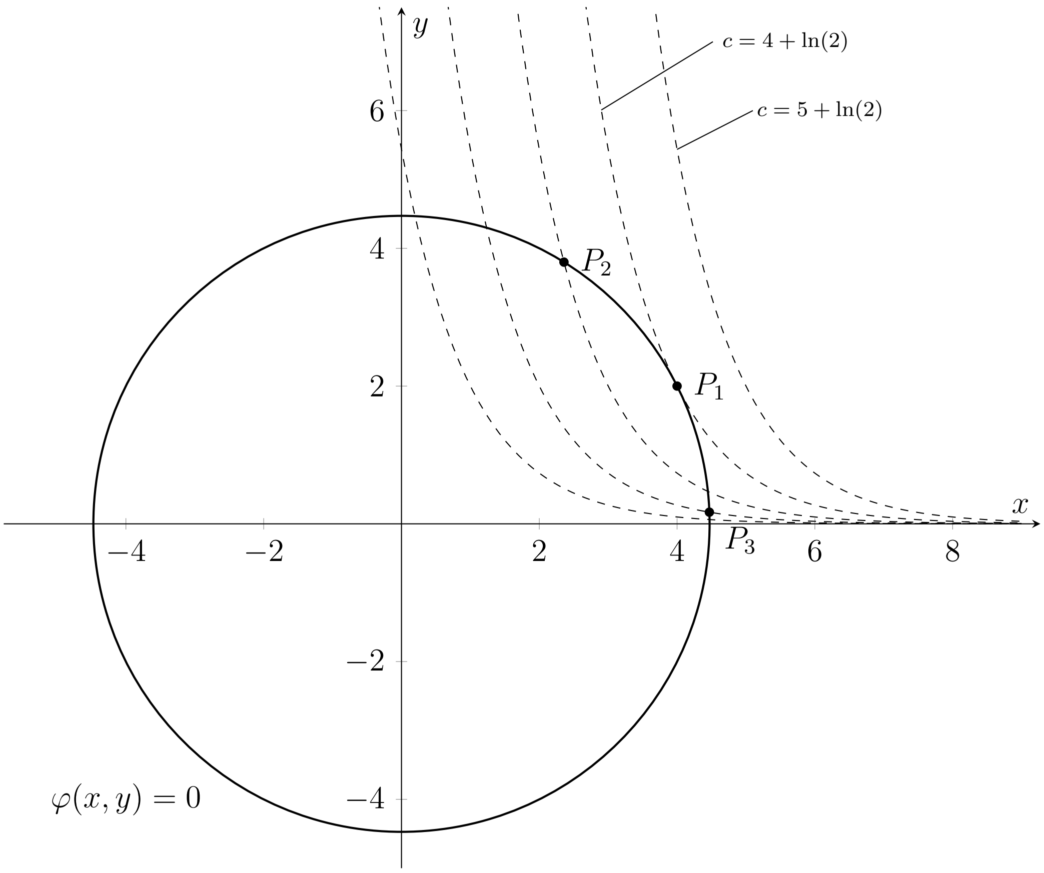
(c) ein Minimum im Punkt P = (1,-1).

(d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Aufgabe 2

Frage 3 (3 Punkte)

Die folgende Abbildung zeigt die Niveaulinien der Funktion $f(x, y) = x + \ln(y)$ zu verschiedenen Niveaus c und die Kurve $\varphi(x, y) = x^2 + y^2 - 20 = 0$.



Die Funktion f hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ an der Stelle

(a) P_1 ein Maximum.

(b) P_1 ein Minimum.

(c) P_2 ein Maximum.

(d) P_3 ein Minimum.

Aufgabe 2

Frage 4 (3 Punkte)

Für die Funktionen f und g gilt:

$$\int_b^a \mu\, f(x)\, dx = k_1 \text{ und } \int_a^b \rho\, g(x)\, dx = k_2,$$

wobei $\mu, \rho \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$ reelle Zahlen sind.

Dann folgt:

(a) $\int_a^b (g(x) + f(x))\, dx = \mu\, k_1 + \rho\, k_2$.

(b) $\int_a^b (g(x) + f(x))\, dx = \frac{k_1}{\rho} - \frac{k_2}{\mu}$.

(c) $\int_a^b (g(x) + f(x))\, dx = \frac{k_1}{\mu} + \frac{k_2}{\rho}$.

(d) $\int_a^b (g(x) + f(x))\, dx = \frac{k_2}{\rho} - \frac{k_1}{\mu}$.

Aufgabe 2

Frage 5 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \int_x^4 \left(3\,t^2 - t + 1\right)\,dt.$$

Dann folgt

(a) $f(0) = 1$.

(b) $f'(0) = -1$.

(c) $f''(0) = -1$.

(d) $f'''(0) = 0$.

Aufgabe 2

Frage 6 (3 Punkte)

A und B seien $(n \times n)$-Matrizen.
Dann folgt:

(a) $(A+B)^2 = A^2 + B^2$.

(b) $(A+B)^2 = AB + B^2 + A^2 + BA$.

(c) $(A+B)^2 = A^2 + 2\,A\,B + B^2$.

(d) $(A+B)^2 = 2\,A + 2\,B$.

Aufgabe 2

Frage 7 (4 Punkte)

Eine Matrix M heisst *idempotent*, falls $M^2 = M$ ist.
M sei eine invertierbare, idempotente $(n \times n)$-Matrix.

Welche der folgenden Aussagen ist *falsch*?

(a) $\det(\lambda\, M) = \lambda \det(M)$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$.

(b) $\det(M) = 1$.

(c) $\det(M) = \det(M^{-1})$.

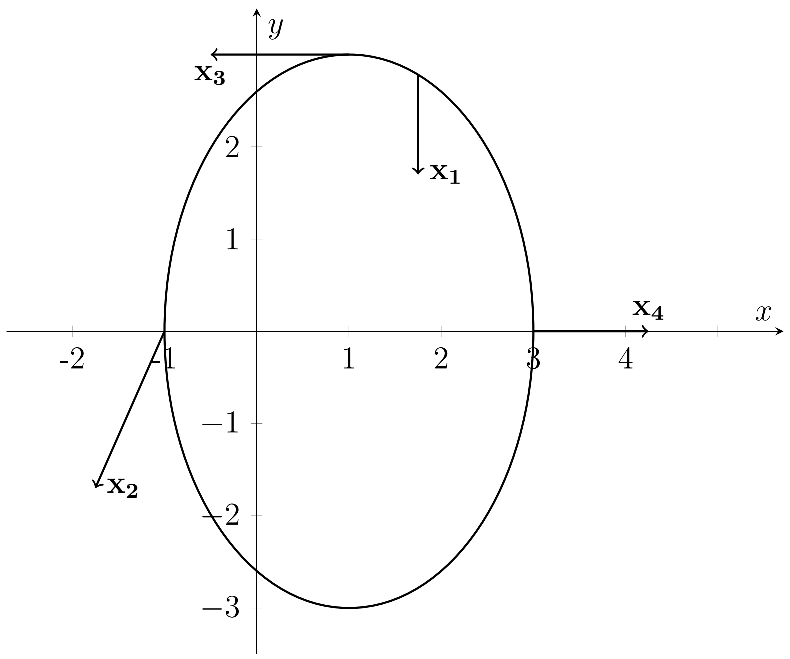
(d) $\det(M) = \det(M^T)$.

Aufgabe 2

Frage 8 (3 Punkte)

Wir betrachten die Niveaulinie $f(x,y)=1$ der Funktion

$$f(x,y)=\frac{(x-1)^2}{4}+\frac{y^2}{9}.$$



Welcher der folgenden Vektoren zeigt in die Richtung des Gradienten von f in einem Punkt $(x_0,y_0)\in D_f$?

(a) $\mathbf{x_1}$.

(b) $\mathbf{x_2}$.

(c) $\mathbf{x_3}$.

(d) $\mathbf{x_4}$.

Aufgabe 2

Frage 9 (3 Punkte)

Sei $A = \{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, ..., \mathbf{a_k}\}$ ein System von n-dimensionalen Vektoren.
Welche der folgenden Behauptungen ist **falsch**?

(a) Falls $\mathbf{a_j} = \mathbf{a_i}$ für gewisse $j \neq i$, dann ist A linear abhängig.

(b) Falls A linear unabhängig ist, dann ist auch jedes Teilsystem von A linear unabhängig.

(c) Falls A linear abhängig ist, dann gilt

$$\mathbf{a_k} = \lambda_1 \, \mathbf{a_1} + \lambda_2 \, \mathbf{a_2} + ... + \lambda_{k-1} \, \mathbf{a_{k-1}}$$

für gewisse $\lambda_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3, ..., k-1)$.

(d) Falls $k < n$ und A linear unabhängig ist, dann gibt es einen n-dimensionalen Vektor $\mathbf{a_{k+1}}$, sodass $\{\mathbf{a_1}, \mathbf{a_2}, \mathbf{a_3}, ..., \mathbf{a_k}, \mathbf{a_{k+1}}\}$ auch linear unabhängig ist.

Aufgabe 2

Frage 10 (4 Punkte)

Für das System $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ haben wir $\text{rg}(A) = 4$, wobei A eine (4×7)-Matrix ist.
Dann gilt:

(a) Das System $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat keine Lösung.

(b) Das System $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 3.

(c) Das System $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 4.

(d) Keine der obigen Antworten ist korrekt.

Aufgabe 3 (32 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Das bestimmte Integral

$$\int_0^{\frac{\pi}{2\,n}} \sin(n\,x)\,e^{\cos(n\,x)}\,dx,$$

wobei $n \in \mathbb{N}$ ist, hat den Wert

(a) $\frac{1}{n}\,(e-1)\,.$

(b) $\frac{1}{n}\,e^{\frac{\pi}{2}} - \frac{1}{n}.$

(c) $\frac{1}{n} - 1.$

(d) Keiner der obigen Werte ist korrekt.

Aufgabe 3

Frage 2 (5 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x^2}\ln(x) & \text{für } x \geq c \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}.$$

Für welchen Wert $c \in \mathbb{R}_+$ ist f eine Dichtefunktion?

(a) $c = 0$.

(b) $c = 1$.

(c) $c = \ln(2)$.

(d) $c = e$.

Aufgabe 3

Frage 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 4\,x^{0.25}\,y^{0.75}.$$

In welchem Punkt (x_0, y_0) der Niveaulinie $f(x,y) = 8$ ist die Richtung der stärksten Funktionszunahme durch den Vektor $\mathbf{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ 48 \end{pmatrix}$ gegeben?

(a) $(x_0, y_0) = (1, 2\sqrt[3]{2})$.

(b) $(x_0, y_0) = (16, 1)$.

(c) $(x_0, y_0) = (2, 2)$.

(d) $(x_0, y_0) = (4, \sqrt[3]{4})$.

Aufgabe 3

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

A hat

(a) den Rang 2.

(b) den Rang 3.

(c) den Rang 4.

(d) den Rang 5.

Aufgabe 3

Frage 5 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 3 \\ -5 & 2 & -4 \end{pmatrix}.$$

M hat die Eigenwerte

(a) $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$ und $\lambda_3 = 2$.

(b) $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 2$.

(c) $\lambda_1 = -2$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 1$.

(d) $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_1 = 2$.

Aufgabe 3

Frage 6 (3 Punkte)

Für welche reellen Werte A und B stellt die Folge $\{y_k\}_{k\in\mathbb{N}_0}$ mit

$$y_k = 3 + 2^k\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

eine Lösung der Differenzengleichung

$$y_{k+1} = A\,y_k + B\,, \quad k = 0, 1, 2, \ldots$$

dar?

(a) $A = 2$ und $B = 3$.

(b) $A = 2$ und $B = -3$.

(c) $A = -2$ und $B = 3$.

(d) $A = -2$ und $B = -3$.

Aufgabe 3

Frage 7 (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$-\pi\, y_{k+1} - e^2\, y_k + (\pi - e) = 0 \quad (k = 0, 1, 2, ...)$$

ist

(a) monoton und konvergent.

(b) monoton und divergent.

(c) oszillierend und konvergent.

(d) oszillierend und divergent.

Aufgabe 3

Frage 8 (5 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$a\,(a-2)\,y_k - (a-2)^2\,y_{k+1} + 4 = 0, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$, ist genau dann monoton und konvergent, wenn

(a) $a < 0$.

(b) $0 < a < 1$.

(c) $a > 2$

(d) Die allgemeine Lösung ist für kein $a \in \mathbb{R}$ monoton und konvergent.

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2019

2'200 Mathematik B

Antwortbogen Multiple-Choice-Fragen (Seite 1 von 2)

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Frage 9: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
9.	☐	☐	☐	☐

Frage 10: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
10.	☐	☐	☐	☐

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2019

2'200 Mathematik B

Antwortbogen Multiple-Choice-Fragen (Seite 2 von 2)

Aufgabe 3 (32 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐