Mathematik B
Musterlösung Nachholprüfung Frühjahrssemester 2019

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

5. Februar 2020

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Offene Fragen setzen mehr als nur das Anwenden von Formeln und Gleichungen voraus, weshalb das einfache Suchen nach der richtigen Formel oftmals nicht zum Erfolg führt. Tatsächlich sollte man beim Herangehen an das Problem zunächst die Schlüsselwörter identifizieren, die auf den im entsprechenden Kontext hilfreichsten mathematischen Rahmen hinweisen. Erst in einem zweiten Schritt sollte man verifizieren, ob die angegebenen Informationen im Text auch ausreichen, um spezifische mathematische Resultate anwenden zu können. Als Beispiel würde ein Text mit Inhalt "Maximierung" oder "Minimierung" auf das Anwenden von mathematischer Optimierung hindeuten und man müsste prüfen, ob das Problem mit oder ohne Nebenbedingung gestellt ist. Das Übersetzen von einem durch einen Text beschriebenen Problem in einen äquivalenten mathematischen Ausdruck nennt man *mathematische Formalisierung* und ist einer der wichtigsten Schritte beim Lösen von Problemen mit Hilfe einer mathematischen Herangehensweise überhaupt. Für die offenen Fragen ist es daher notwendig, die Probleme zuerst mathematisch zu formalisieren, bevor sie mit den entsprechenden mathematischen Formeln und Gleichungen gelöst werden können.

Aufgabe 1

(a) (9 Punkte)

Der Augenmerk in dieser Aufgabe sollte darauf liegen zu verstehen, welches mathematische Konzept angewandt werden muss. Die Schlüsselwörter "Nettogewinn...maximal" sind dafür entscheidend: Sie sagen uns, dass es sich um ein Optimierungsproblem mit oder ohne Nebenbedingungen handelt. Nebenbedingungen sind Eigenschaften, welche die freie Wahl der Variablen einschränkt. In diesem Fall sind aber die Variablen p_1 und p_2 (die Mengen von Gut 1 und 2 frei wählbar) nicht eingeschränkt. Daher handelt es sich um ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingungen. Offen bleibt die Frage, welche Funktion maximiert werden soll. Der Text erwähnt, dass der Nettogewinn maximiert werden soll. Daher haben wir:

$$
\begin{aligned}
\text{Gewinn} &= \text{Umsatz} - \text{Kosten} \\
P(p_1, p_2) &= \underbrace{(100 - 5\,p_1)\,p_1 + (200 - 4\,p_2)\,p_2}_{\text{Umsatz}} - \underbrace{K(100 - 5\,p_1, 200 - 4\,p_2)}_{\text{Kosten}} \\
&= (100 - 5\,p_1)\,p_1 + (200 - 4\,p_2)\,p_2 - \left((100 - 5\,p_1)^2 + (100 - 5\,p_1)\,(200 - 4\,p_2) + (200 - 4\,p_2)^2\right) \\
&= -30\,p_1^2 - 20\,p_1\,p_2 - 20\,p_2^2 + 2100\,p_1 + 2200\,p_2 - 70000.
\end{aligned}
$$

Ein lokales Maximum $(p_1^\star, p_2^\star)$ der Funktion P muss die Bedingungen erster Ordnung erfüllen:

$$P_{p_1}(p_1^\star, p_2^\star) = 0 \text{ und } P_{p_2}(p_1^\star, p_2^\star) = 0.$$

Es folgt:

$$\begin{cases} -60\,p_1^\star - 20\,p_2^\star + 2100 = 0 \\ -20\,p_1^\star - 40\,p_2^\star + 2200 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6\,p_1^\star + 2\,p_2^\star = 210 & (1) \\ 2\,p_1^\star + 4\,p_2^\star = 220 & (2) \end{cases}.$$

Multiplizieren der Gleichung (1) mit 2 und anschliessendes Subtrahieren der Gleichung (2) liefert:

$$10\,p_1^\star = 200 \Leftrightarrow p_1^\star = 20.$$

Einfügung des Resultats in Gleichung (2) liefert:

$$p_2^\star = 45.$$

Es ergibt sich ein einzelner stationärer Punkt $(p_1^\star, p_2^\star) = (20, 45)$ von P, welcher damit der einzige Kandidat für ein lokales Maximum ist.

Wir prüfen nun die hinreichenden Bedingungen erster Ordnung. Es gilt:

$$\left\{\begin{array}{c} P_{p_1,p_1}(p_1^\star,p_2^\star) < 0 \\ P_{p_2,p_2}(p_1^\star,p_2^\star) < 0 \\ P_{p_1,p_1}(p_1^\star,p_2^\star)\,P_{p_2,p_2}(p_1^\star,p_2^\star) - (P_{p_1,p_2}(p_1^\star,p_2^\star))^2 > 0 \end{array}\right. \quad \Rightarrow (p_1^\star,p_2^\star) \text{ ist ein Maximum.}$$

Wir erhalten:

$$\begin{aligned} P_{p_1,p_1}(p_1^\star,p_2^\star) &= -60 < 0, \\ P_{p_2,p_2}(p_1^\star,p_2^\star) &= -40 < 0, \\ P_{p_1,p_2}(p_1^\star,p_2^\star) &= -20 < 0. \end{aligned}$$

Damit ist

$$P_{p_1,p_1}(p_1^\star,p_2^\star)\,P_{p_2,p_2}(p_1^\star,p_2^\star) - (P_{p_1,p_2}(p_1^\star,p_2^\star))^2 = (-60)\,(-40) - (-20)^2 > 0$$

und folglich ist

$$(p_1^\star,p_2^\star) = (20,45)$$

ein lokales Maximum von P.

(b) (9 Punkte)

Das Augenmerk in dieser Aufgabe sollten auf den Schlüsselwörtern "Kosten...minimal" liegen. Sie sagen uns, dass es sich um ein Optimierungsproblem handelt. Im Gegensatz zu Aufgabenteil a) sind in diesem Fall die Variablen x und y beschränkt durch die Bedingung, dass für die T-Shirt Produktion genau 100 Tonnen Wolle benötigt wird. Es handelt sich deshalb um ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingungen. Der Text erwähnt, dass die Gesamtkosten, also $K(x,y) = K_1(x) + K_2(y)$, minimiert werden sollen. Die Nebenbedingung entspricht der Bedingung an die Gesamtmenge benötigter Wolle, die sich aus den Mengen x und y des ersten bzw. zweiten Herstellers zusammensetzt, d.h. $x + y = 100$. Das Optimierungsproblem ist folglich gegeben durch

$$\min K(x,y) = K_1(x) + K_2(y) = \frac{3}{4}\,x^2 + 400 + \frac{11}{4}\,y^2 + 10\,y + 300 = \frac{3}{4}\,x^2 + \frac{11}{4}\,y^2 + 10\,y + 700$$

unter der Nebenbedingung:

$$x + y = 100.$$

Um das Problem zu lösen wenden wir die Substitutionsmethode an, denn sie erlaubt es die Komplexität des Optimierungsproblems deutlich zu reduzieren. Wir schreiben daher x als Funktion von y:

$$x = 100 - y.$$

Wir setzen nun x in K ein und erhalten:

$$k(y) = K(100-y,y) = \frac{3}{4}\,(100-y)^2 + \frac{11}{4}\,y^2 + 10\,y + 700 = \frac{7}{2}\,y^2 - 140\,y + 8200.$$

Die Funktion k ist quadratisch mit streng positivem Koeffizienten vor dem quadratischen Term. Daher ist k streng konvex und jeder stationäre Punkt $y^\star$ ist ein globales Minimum. Wir lösen daher:

$$k'(y^\star) = 0 \Leftrightarrow 7\,y^\star - 140 = 0 \Leftrightarrow y^\star = 20.$$

Es folgt, dass $y^\star = 20$ ein globales Minimum von k ist und damit

$$(x^\star, y^\star) = (100 - y^\star, y^\star) = (80, 20)$$

ein globales Minimum von K unter der Nebenbedingung $x + y = 100$. Des Weiteren sind

$$K(80, 20) = 6800$$

die minimalen Produktionskosten.

(c) (8 Punkte)

In dieser Aufgabe ist eine Beschränkung der Laufzeiten für jede Maschine gegeben. Wir nennen x_i die Anzahl Einheiten von Produkt P_i, welche an einem Tag produziert werden. Dann ist

$$10\,x_1 + 7\,x_2 + 8\,x_3 + 4\,x_4$$

die Gesamtzahl Minuten, welche Maschine M_1 benötigt, um diese Einheiten zu produzieren. Da die Maschine 16 Stunden läuft (d.h. 960 Minuten) gilt folgende Beschränkung für M_1:

$$10\,x_1 + 7\,x_2 + 8\,x_3 + 4\,x_4 = 960.$$

Wir haben ähnliche Beschränkungen für die Maschinen M_2, M_3 und M_4:

$$5\,x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 + 11\,x_4 = 960,$$

$$8\,x_1 + 9\,x_2 + 6\,x_3 + 6\,x_4 = 960,$$

$$10\,x_1 + m\,x_2 + 9\,x_3 + 9\,x_4 = 960,$$

Die vier Gleichungen ergeben ein lineares Gleichungssystem:

$$\left\{\begin{array}{ccc} 10\,x_1 + 7\,x_2 + 8\,x_3 + 4\,x_4 & = & 960 \\ 5\,x_1 + 5\,x_2 + 4\,x_3 + 11\,x_4 & = & 960 \\ 8\,x_1 + 9\,x_2 + 6\,x_3 + 6\,x_4 & = & 960 \\ 10\,x_1 + m\,x_2 + 9\,x_3 + 9\,x_4 & = & 960 \end{array}\right. .$$

Wir lösen es mit dem Gauss Algorithmus:

$$(A, \mathbf{b}) = \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 7 & 8 & 4 & 960 \\ 5 & 5 & 4 & 11 & 960 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 960 \\ 10 & m & 9 & 4 & 960 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ :(10) \\ \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.7 & 0.8 & 0.4 & 96 \\ 5 & 5 & 4 & 11 & 960 \\ 8 & 9 & 6 & 6 & 960 \\ 10 & m & 9 & 4 & 960 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ \\ -5\,(I) \\ -8\,(I) \\ -10\,(I) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.7 & 0.8 & 0.4 & 96 \\ 0 & 1.5 & 0 & 9 & 480 \\ 0 & 3.4 & -0.4 & 2.8 & 192 \\ 0 & m-7 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ : (1.5) \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0.7 & 0.8 & 0.4 & 96 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 320 \\ 0 & 3.4 & -0.4 & 2.8 & 192 \\ 0 & m-7 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) & \begin{array}{l} -0.7\,(II) \\ \\ -3.4\,(II) \\ -(m-7)\,(II) \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.8 & -3.8 & -128 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 320 \\ 0 & 0 & -0.4 & -17.6 & -896 \\ 0 & 0 & 1 & 42-6\,m & -320\,m+2240 \end{array}\right) & \begin{array}{l} \\ \\ : (-0.4) \\ \\ \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{cc} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array} & \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0.8 & -3.8 & -128 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 320 \\ 0 & 0 & 1 & 44 & 2240 \\ 0 & 0 & 1 & 42-6\,m & -320\,m+2240 \end{array}\right) & \begin{array}{l} -0.8\,(III) \\ -6\,(III) \\ \\ -(III) \end{array} \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{cccc|c} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & \\ \end{array} \\ \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -39 & -1920 \\ 0 & 1 & 0 & 6 & 320 \\ 0 & 0 & 1 & 44 & 2240 \\ 0 & 0 & 1 & -6\,m-2 & -320\,m \end{array}\right) \end{array}$$

Wenn $-6\,m - 2 = 0$, d.h. $m = -\frac{1}{3}$ dann ist $\text{rg}(A) = 3 < \text{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$, da $-320 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \neq 0$. In diesem Fall hat das LGS $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ keine Lösung.

Ansonsten gilt für alle $m \neq -\frac{1}{3}$, und daher für alle $m > 0$, dass das LGS genau eine Lösung $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3, x_4)^T$ hat (diese kann auch Bruchteile von produzierten Einheiten beinhalten).

(d) (6 + 4 Punkte)

Von Interesse ist die Entwicklung des Betrags V_n, welchen Dora am Ende des Jahres n auf dem Sparkonto besitzt.

Der erste Schritt ist es, alle Transaktionen während eines Jahres zu identifizieren, welche das Vermögen am Ende des Jahres beeinflussen. Zuerst wächst das Vermögen am Anfang des Jahres um CHF 5′000. Mitte des Jahres werden 60% des vorhandenen Kapitals abgehoben. Hinzu kommen Zinsen, die für den Betrag bis Mitte des Jahres anfallen, sowie anschliessend auf die reduzierte Summe bis Ende Jahres. Für die Verzinsung sind zwei Lösungsmöglichkeiten zulässig:

Lösungsmöglichkeit 1

(d1) (6 Punkte)

$$
\begin{aligned}
V_{n+1} &= \underbrace{(V_n + 5'000) \cdot 0.4}_{\text{Vermögensentwicklung ohne Zinsen mit Abhebung am 1. Juli}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 0.0125 \cdot (V_n + 5'000)}_{\text{Zinsen aus dem ersten Halbjahr}} \\
&\quad + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 0.0125 \cdot 0.4 \cdot (V_n + 5'000)}_{\text{Zinsen aus dem zweiten Halbjahr}} \\
&= 0.40875\, V_n + 2'043.75
\end{aligned}
$$

Des Weiteren ist $V_0 = 0$. Es resultiert also eine lineare Differenzengleichung, wobei $A = 0.40875$ und $B = 2'043.75$ ist. Für die explizite Lösung benötigen wir

$$V^* = \frac{2'043.75}{1 - 0.40875} \approx 3'456.65$$

Daraus ergibt sich

$$
\begin{aligned}
V_n &= 0.40875^n\,(-V^*) + V^* \\
&= 3'456.65 \cdot (1 - 0.40875^n)
\end{aligned}
$$

(d2) (4 Punkte)

Für den Aufgabenteil 2 ergibt sich mit Aufgabenteil 1 ein langfristiges Vermögen (d.h. $\lim_{n\to\infty} V_n$) von $3'456.65$. Für die Frage, wann das Vermögen zum ersten Mal $3'400$ übersteigt, lösen wir die Ungleichung

$$
\begin{aligned}
& V_n &\geq\; & 3400 \\
\Leftrightarrow\quad & V^*(1 - 0.40875^n) &\geq\; & 3400 \\
\Leftrightarrow\quad & 1 - 0.40875^n &\geq\; & \frac{3400}{V^*} \\
\Leftrightarrow\quad & n &\geq\; & \frac{\ln(1 - \frac{3400}{V^*})}{\ln(0.40875)} \approx 4.595.
\end{aligned}
$$

D.h. mindestens 5 Jahre.

Lösungsmöglichkeit 2

Hier ist der Gedanke, die Vermögensentwicklung zunächst nur bis Ende Juni zu betrachten. Daraus ergibt sich (inklusive Verzinsung bis Anfang Juli) folgende Vorschrift:

$$(V_n + 5000) + (V_n + 5000)\,\frac{1}{2} \cdot 1.25\% = (V_n + 5000) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 1.25\%\right).$$

Anschliessend wird, ausgehend vom Zeitpunkt 1. Jul,i 60% abgehoben, d.h. 40% verbleiben auf dem

Bankkonto, welche nochmals für ein halbes Jahr verzinst werden. Daraus ergibt sich am Ende des vollen Jahres $(n+1)$ das Vermögen:

$$V_{n+1} = 40\% \cdot (V_n + 5000) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 1.25\%\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot 1.25\%\right) = 0.4\,(V_n + 5000)\,\left(1 + \frac{1}{2} \cdot 1.25\%\right)^2 .$$

Wir verwenden

$$1 + \frac{1}{2} \cdot 1.25\% = 1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{5}{400} = 1 + \frac{5}{800} = 1 + \frac{1}{160} = \frac{161}{160},$$

Daraus folgt:

$$V_{n+1} = \underbrace{0.4\,\left(\frac{161}{160}\right)^2}_{=A} V_n + \underbrace{0.4 \cdot 5000\,\left(\frac{161}{160}\right)^2}_{=B} \approx 0.4050156 \cdot V_n + 2025.078.$$

Damit erhalten wir die lineare Differenzengleichung erster Ordnung $\{V_n\}_{n\geq 0}$ mit $V_0 = 0$.

$$V_n = A^n\,(V_0 - V^\star) + V^\star = (1 - A^n)\,V^\star$$

wobei

$$V^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{2025.078}{1 - 0.4050156} \approx 3403.582.$$

Es gilt:

$$V_n = 3403.582 \cdot (1 - 0.4050156^n)\,.$$

(d2) (4 Punkte)

Analog zu Lösungsmöglichkeit 1 ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} V_n = \lim_{n\to\infty} 3403.582 \cdot (1 - 0.4050156^n) = 3403.582.$$

Sowie

$$\begin{aligned}
V_n \geq 3400 \quad &\Leftrightarrow \quad 3403.582 \cdot (1 - 0.4050156^n) \geq 3400 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - 0.4050156^n \geq \frac{3400}{3403.582} \\
&\Leftrightarrow \quad 0.4050156^n \leq 1 - \frac{3400}{3403.582} \\
&\Leftrightarrow \quad n \geq \frac{\ln\left(1 - \frac{3400}{3403.582}\right)}{\ln(0.4050156)} \approx 7.586233.
\end{aligned}$$

Damit wird der Betrag von CHF $3'400$ erst nach 8 Jahren erreicht.

Wurden die Zahlen aus der Hilfestellung verwendet, ergibt sich ein langfristiges Vermögen von CHF $3'440$ und eine Dauer von mindestens 7 Jahren, bis CHF $3'400$ erreicht werden.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen

Aufgabe 2

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☒	☐	☐	☐
Frage 2	☐	☐	☐	☒
Frage 3	☒	☐	☐	☐
Frage 4	☐	☐	☐	☒
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☒	☐	☐
Frage 7	☒	☐	☐	☐
Frage 8	☐	☐	☐	☒
Frage 9	☐	☐	☒	☐
Frage 10	☐	☒	☐	☐

F1. Die korrekte Antwort ist (a). Der Punkt (x_0, y_0) ist stationär, wenn er die folgenden Bedienungen erfüllt: $f_x(x_0, y_0) = 0$ und $f_y(x_0, y_0) = 0$. Der Punkt (x_0, y_0) ist eine lokale Extremstelle, falls die folgende Bedingung erfüllt ist:

$$f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0.$$

Es gilt, dass $f_{xy}(x_0, y_0) = f_{yx}(x_0, y_0)$, weshalb diese Bedingung äquivalent zur Bedingung in (a) ist.

F2. Die korrekte Antwort ist (d). Aufgrund von $x + y = 0$, folgt $y = -x$ und $f(x, y) = f(x, -x) = x^2 \cdot x = x^3$. Deshalb, gegeben die Nebenbedingung $x + y = 0$, ist die Zielfunktion die kubische Funktion $x \mapsto x^3$. Diese hat keine Extremstellen, weshalb Antwort (d) korrekt ist.

F3. Die korrekte Antwort ist (a). Unter den gegebenen Nebenbedingungen ist P_1 eine Extremstelle, da die Tangenten an die Niveaulinien $\varphi(x, y) = 0$, respektive $f(x, y) = 4 + \ln(2)$, in P_1 identisch sind. P_1 ist ausserdem ein Maximum, da der Wert von f sinkt, wenn man sich von P_1 entlang der Kurve $\varphi(x, y) = 0$ wegbewegt.

F4. Die korrekte Antwort ist (d). Es gilt:

$$\int_a^b f(x)\, dx = -\int_b^a f(x)\, x = \frac{-1}{\mu} \int_b^a \mu\, f(x)\, dx = -\frac{k_1}{\mu}$$

und

$$\int_a^b g(x)\, dx = \frac{1}{\rho} \int_a^b \rho\, g(x)\, dx = \frac{k_2}{\rho}.$$

Daraus folgt:

$$\int_a^b (g(x) + f(x))\; dx = \int_a^b g(x)\, dx + \int_a^b f(x)\, dx = \frac{k_2}{\rho} - \frac{k_1}{\mu}.$$

F5. Die korrekte Antwort ist (b). Es gilt:

$$f(x) = \int_x^4 (3\, t^2 - t + 1)\, dt = -\int_4^x (3\, t^2 - t + 1)\, dt.$$

Daraus folgt:

$$f(0) = \int_0^4 (3\, t^2 - t + 1)\, dt = \left[t^3 - \frac{1}{2}\, t^2 + t\right]_0^4 = 60.$$

Zudem gilt:

$$f'(x) = -(3\,x^2 - x + 1),$$
$$f''(x) = -6\,x + 1,$$
$$f'''(x) = -6.$$

Daraus folgt: $f'(0) = -1$, $f''(0) = 1$ und $f'''(0) = -6$.

F6. Die korrekte Antwort ist (b). Es gilt:

$$(A+B)^2 = (A+B)\,(A+B) = A\,A+A\,B+B\,A+B\,B = A^2+A\,B+B\,A+B^2 = A\,B+B^2+A^2+B\,A.$$

F7. Die korrekte Antwort ist (a). Wenn M idempotent ist, dann gilt

$$M^2 = M$$

Da M auch invertierbar ist, können wir die letzte Gleichung mit M^{-1} multiplizieren und bekommen:

$$M^{-1}\,M^2 = \underbrace{M^{-1}\,M}_{=I} \Leftrightarrow \underbrace{M^{-1}\,M}_{=I}\,M = I \Leftrightarrow I\,M = I \Leftrightarrow M = I.$$

Es folgt, dass die Einheitsmatrix I die einzige invertierbare Matrix ist, die auch idempotent ist. Deshalb sind die Antworten (b)-(d) korrekt und (a) ist falsch.

F8. Die korrekte Antwort ist (d). Der Gradient von f an einem gegebenen Punkt ist orthogonal zu der Niveaulinie von f in diesem Punkt. Nur der Vektor $\mathbf{x}_4$ erfüllt diese Bedingung.

F9. Die korrekte Antwort ist (c). Die Aussagen (a), (b) und (d) sind richtig. Die Aussage (c) ist nicht allgemein gültig, weil A ein linear abhängiges System sein könnte, auch wenn $\mathbf{a}_k$ linear unabhängig von $\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_{k-1}$ ist.

F10. Die korrekte Antwort ist (b). Aus $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b}) = 4$ folgt dass $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ entweder eine oder unendlich viele Lösungen hat. Das System hat unendlich viele Lösungen, da $\mathrm{rg}(A) = 4 < 7 = n$. Der Lösungsraum hat hat die Dimension $n - \mathrm{rg}(A) = 7 - 4 = 3$.

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☒	☐	☐	☐
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☐	☐	☒	☐
Frage 5	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☐	☒	☐	☐
Frage 7	☐	☐	☐	☒
Frage 8	☒	☐	☐	☐

F1. Die korrekte Antwort ist (a). Wir lösen das Integral mithilfe der Substitutionsregel. Wir definieren $y = \cos(n\,x)$, woraus folgt, dass $\frac{dy}{dx} = -n\,\sin(n\,x)$. Es folgt:

$$\int \sin(n\,x)\,e^{\cos(n\,x)}\,dx = \int -\frac{1}{n}\,e^y\,dy = -\frac{1}{n}\,e^y + C = -\frac{1}{n}\,e^{\cos(n\,x)} + C.$$

Wir bekommen:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2n}} \sin(n\,x)\, e^{\cos(n\,x)}\, dx = -\frac{1}{n}\left[e^{\cos(n\,x)}\right]_0^{\frac{\pi}{2n}} = -\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\,e = \frac{1}{n}\,(e-1).$$

F2. Die korrekte Antwort ist (b). f ist eine Dichtefunktion genau dann, wenn $f(x) \geq 0$ für alle x und $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = 1$. In diesem Fall ist $f(x) \geq 0$ für alle x genau dann, wenn $c \geq 1$. Zudem gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \int_c^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\ln(x)\,dx = \lim_{N\to\infty}\left[-\frac{\ln(x)}{x} - \frac{1}{x}\right]_c^{\infty} = \frac{\ln(c)}{c} + \frac{1}{c} = 1 \Leftrightarrow c = 1.$$

F3. Die korrekte Antwort ist (b). Die Richtung der stärksten Zunahmen von f vom Punkt (x_0, y_0) ist gegeben durch den Gradienten von f im Punkt (x_0, y_0). Es folgt:

$$\operatorname{grad} f(x_0, y_0) = \begin{pmatrix} x_0^{-0.75}\, y_0^{0.75} \\ 3\,x_0^{0.25}\, y_0^{-0.25} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 48 \end{pmatrix}$$

für ein $\lambda > 0$. Es folgt, dass:

$$\frac{3\,x_0^{0.25}\, y_0^{-0.25}}{x_0^{-0.75}\, y_0^{0.75}} = \frac{48}{1} \Leftrightarrow \frac{x_0}{y_0} = 16 \Leftrightarrow x_0 = 16\,y_0.$$

Wir setzen diese Formel in $f(x_0, y_0) = 8$ ein und erhalten

$$4\,(16\,y_0)^{\frac{1}{4}}\, y_0^{\frac{3}{4}} = 8 \Leftrightarrow 8\,y_0 = 8 \Leftrightarrow y_0 = 1.$$

Es folgt, dass $x_0 = 16\,y_0 = 16$.

F4. Die korrekte Antwort ist (c). Wir wenden den Gauss-Algorithmus an:

$$\begin{aligned}
A \quad &= \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ -(I) \\ \\ \end{array} \\[1em]
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 2 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -(II) \\ \\ +(II) \\ -(II) \end{array} \\[1em]
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 4 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \\ \\ :4 \\ \\ \end{array} \\[1em]
&\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{array}{l} +(III) \\ -2\,(III) \\ \\ +(III) \end{array}
\end{aligned}$$

$$\longrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 3/4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -1/4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 3/4 \end{pmatrix} = A^\star.$$

Es folgt, dass $\text{rg}(A^\star) = 4$ (da $A^\star$ eine reguläre 4×4 Untermatrix hat) und deshalb gilt $\text{rg}(A) = \text{rg}(A^\star) = 4$.

F5. Die korrekte Antwort ist (c). Es gilt:

$$\begin{aligned} \det(M - \lambda I) &= \begin{pmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 3 & 1-\lambda & 3 \\ -5 & 2 & -4-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (2-\lambda)(1-\lambda)(-4-\lambda) + 45 + 6 \\ &\quad +5(1-\lambda) - 6(2-\lambda) + 9(-4-\lambda) \\ &= -\lambda^3 - \lambda^2 + 2 \\ &= -\lambda(\lambda - 1)(\lambda + 2) \end{aligned}$$

Deshalb gilt: $\det(M - \lambda I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{-2, 1, 0\}$.

F6. Die korrekte Antwort ist (b). Es gilt:

$$y_{k+1} = 3 + 2^{k+1} = 3 + 2 \cdot 2^k = 3 + 2(y_k - 3) = 3 + 2\,y_k - 6 = 2\,y_k - 3.$$

Daraus folgt, dass $A = 2$ und $B = -3$.

F7. Die korrekte Antwort ist (d). Es gilt:

$$y_{k+1} = \underbrace{-\frac{e^2}{\pi}}_{=A}\, y_k + \frac{\pi - e}{\pi}.$$

Die Lösung zur obigen Differenzengleichung erster Ordnung ist oszillierend und divergent, da $A \approx -2.352$.

F8. (a). Die Normalform der Differenzengleichung ist

$$y_{k+1} = \frac{a}{a-2}\, y_k + \frac{4}{(a-2)^2},$$

also gilt $A = \frac{a}{a-2}$ und $B = \frac{4}{(a-2)^2}$. Das heisst, $A \neq 1$. Die generelle Lösung der Differenzengleichung ist deshalb monoton und konvergent genau dann, wenn $0 < A < 1$. Es gilt:

$$0 < A < 1 \Leftrightarrow 0 < \frac{a}{a-2} < 1.$$

Für $a - 2 > 0$ folgt, dass $0 < a < a - 2$, und dies ist nie erfüllt.

Für $a - 2 < 0$ folgt, dass $0 > a > a - 2$, und dies ist immer erfüllt falls $a < 0$.