

Mathematik A
Prüfung Herbstsemester 2019

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

28.01.2020

Erzielte Punkte

	Offene Fragen	(a1 a2)	(a3)	(b)	(c)	(d)	Total
Bitte frei lassen	Aufgabe 1	(8)	(6)	(6)	(10)	(10)	(40)
	MC-Fragen						
	Aufgabe 2						(32)
	Aufgabe 3						(28)
							(100)

Teil I: Offene Fragen (40 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

- (i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fließt in die Bewertung ein.
- (ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.
- (iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.
- (iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.
- (v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.
- (vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1**(c) (10 Punkte)**

Eine Familie leiht sich CHF 1'000'000, um ein Haus zu kaufen. Der Zins beträgt zu Beginn $i = 1\%$. Die Familie beschliesst, CHF C_1 am Ende jeden Jahres für 10 Jahre zurückzuzahlen, um so den Schuldenstand auf CHF 750'000 am Ende des 10. Jahres zu reduzieren. Am Ende des 5-ten Jahres ergibt sich die Möglichkeit einer Sondertilgung. Die Familie zahlt folglich am Ende des 5-ten Jahres einen Gesamtbetrag in Höhe von CHF 150'000 (einschliesslich C_1) zurück und verhandelt die Konditionen mit der Bank neu. Der Zinssatz fällt damit auf 0.5%. Die Familie beschliesst, die Schulden weiterhin mit CHF C_1 am Ende jeden Jahres zurückzuzahlen, bis diese auf CHF 500'000 reduziert sind. Aus steuerlichen Gründen zahlen Sie anschliessend CHF C_2 pro Jahr an die Bank, um ihre Schulden konstant bei CHF 500'000 zu halten.

- (c1) Fügen Sie alle Ereignisse und Mittelflüsse dem Zeitstrahl hinzu.
- (c2) Berechnen Sie C_1 .
- (c3) Wie hoch ist der Schuldenstand, nachdem die Familie die Zahlung von CHF 150'000 am Ende des 5-ten Jahres veranlasst hat?
- (c4) Wie lange dauert es nach Ende des 5-ten Jahres, bis der Schuldenstand CHF 500'000 erreicht hat?
- (c5) Berechnen Sie C_2 .



Teil II: Multiple-Choice-Fragen (60 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

- (i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.
- (ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.
- (iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.
- (iv) Bitte lesen Sie die Fragen und die Anweisungen auf dem Multiple-Choice-Antwortbogen sorgfältig.

Aufgabe 2 (32 Punkte)**Frage 1 (4 Punkte)**

Welche der folgenden Aussagen ist wahr, genau dann wenn A und B in ihrem Wahrheitsgehalt verschieden sind (eine Aussage ist wahr, die andere ist falsch)?

- (a) $A \vee B$
- (b) $A \wedge B$
- (c) $\neg(A \Rightarrow B)$
- (d) $(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$

Aufgabe 2

Frage 2 (3 Punkte)

Sei $A = \text{“Jeanette und Hans kommen an die Party”}$ und $B = \text{“Mark kommt an die Party”}$.

Wir wissen, dass Hans die Party nicht besuchte. Über Jeanette und Mark ist jedoch nichts bekannt.

Welche der folgenden Aussagen ist demnach richtig?

- (a) $A \wedge B$
- (b) $A \vee B$
- (c) $A \Rightarrow B$
- (d) $A \Leftrightarrow B$

Aufgabe 2**Frage 3 (3 Punkte)**

Die Folge $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt, monoton und konvergent. Zudem gilt $a_n \neq 0$ für alle n . Sei $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ die Folge definiert durch $b_n = \frac{1}{a_n}$.

Dann folgt:

- (a) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist beschränkt.
- (b) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist monoton.
- (c) $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ ist konvergent.
- (d) Keine der obigen Eigenschaften folgt.

Aufgabe 2**Frage 4 (4 Punkte)**

Sei $\{a_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine geometrische Folge mit $\frac{a_{n+1}}{a_n} = q \in (0, 1)$. Sei $\{b_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ eine andere geometrische Folge mit $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{q}{2}$.

Zudem gilt: $\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k$. Dann folgt:

- (a) $b_1 = 2 a_1$, falls $q = \frac{1}{3}$.
- (b) $b_1 = 2 a_1$, falls $q = \frac{1}{2}$.
- (c) $b_1 = 2 a_1$, falls $q = \frac{2}{3}$.
- (d) Die Bedingung $b_1 = 2 a_1$ ist nie erfüllt.

Aufgabe 2

Frage 5 (3 Punkte)

Am Tag, an dem Mark einen Kredit über $P_1 = 1'000'000$ CHF mit Zinssatz $i_1 = 1\%$ aufnimmt, nimmt Lucie einen Kredit über $P_2 = 800'000$ CHF mit Zinssatz $i_2 = 1.2\%$ auf. Mark zahlt den Kredit in konstanten Raten von $10'500$ CHF jeweils am Ende des Jahres zurück, während Lucie $9'500$ CHF auch jeweils am Ende des Jahres zurückbezahlt.

Welche der folgenden Antworten ist richtig?

- (a) Mark bezahlt den Kredit vor Lucie zurück.
- (b) Lucie bezahlt den Kredit vor Mark zurück.
- (c) Lucie und Mark bezahlen den Kredit zum gleichen Zeitpunkt zurück.
- (d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Aufgabe 2**Frage 6 (3 Punkte)**

Seien f und g Funktionen einer reellen Variable mit Definitionsbereichen D_f beziehungsweise D_g .

Sei $h = f \circ g$. Welche der folgenden Aussagen über den Definitionsbereich D_h von h ist richtig?

(a) $D_h = D_f \cup D_g$

(b) $D_h \subseteq D_g$

(c) $D_h \subseteq D_f$

(d) $D_h = D_f \cap D_g$

Aufgabe 2**Frage 7 (3 Punkte)**

Eine Funktion f mit Definitionsbereich $D_f \subseteq \mathbb{R}_{++}$ habe eine Elastizität ε_f , die konstant gleich 2 ist.

Welche der folgenden Aussagen über die Wachstumsrate ρ_f von f ist richtig?

- (a) ρ_f ist streng monoton fallend.
- (b) ρ_f ist streng monoton wachsend.
- (c) ρ_f ist konstant.
- (d) ρ_f ist nicht monoton.

Aufgabe 2**Frage 8 (4 Punkte)**

Eine differenzierbare Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$ ist streng konkav und erfüllt $f(x) > 0$ für alle $x \in D_f$. Zudem gibt es ein $x_0 \in D_f$, $x_0 \neq 0$, so dass für die Elastizität von f an dieser Stelle $\varepsilon_f(x_0) = 0$ gilt.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig:

- (a) Bei x_0 ist f elastisch.
- (b) Bei x_0 besitzt f ein lokales Minimum.
- (c) Bei x_0 besitzt f ein lokales Maximum.
- (d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Aufgabe 2

Frage 9 (3 Punkte)

Sei f eine Funktion einer reellen Variable, die mindestens n -mal differenzierbar ist. Sei P_k das Taylor-Polynom k -ter Ordnung von f an der Stelle x_0 , für $k = 1, \dots, n-1$, und R_k das zugehörige Restglied k -ter Ordnung.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- (a) Für alle $x \in D_f$ und $k = 2, \dots, n-1$ gilt, dass $R_k(x) < R_{k-1}(x)$.
- (b) Für alle $x \in D_f$ und $k = 2, \dots, n-1$ gilt, dass $R_k(x) > R_{k-1}(x)$.
- (c) Für alle $x \in D_f$ und $k = 2, \dots, n-1$ gilt, dass $R_k(x) = R_{k-1}(x)$.
- (d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Aufgabe 2**Frage 10 (2 Punkte)**

Eine Funktion zweier reellen Variablen f sei homogen von Grad 2 und ihre partielle Elastizität erfülle

$$\varepsilon_{f,y}(x, y) = e^{x+y} + 1.$$

Dann folgt:

- (a) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = 1 + e^{x+y}$.
- (b) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = 1 - e^{x+y}$.
- (c) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = e^{x+y}$.
- (d) $\varepsilon_{f,x}(x, y) = -e^{x+y}$.

Aufgabe 3 (28 Punkte)**Frage 1 (4 Punkte)**

Der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\frac{1}{x-1} - \frac{1}{\ln(x)} \right)$$

ist gleich:

- (a) $-\frac{1}{2}$.
- (b) 0.
- (c) $\frac{1}{2}$.
- (d) ∞ .

Aufgabe 3**Frage 2 (4 Punkte)**

Der rechtsseitige Grenzwert

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x$$

ist gleich:

- (a) 0.
- (b) 1.
- (c) e .
- (d) e^e .

Aufgabe 3

Frage 3 (4 Punkte)

Ein Blatt Papier sei 0.5 Millimeter dick. Man faltet das Blatt nun in der Hälfte, so dass es eine neue Dicke von 1 Millimeter hat. Anschliessend faltet man es solange erneut, bis die Dicke des gefalteten Papiers 400'000 Kilometer erreicht (ungefähr die Distanz zwischen Erde und Mond).

Wie oft muss das Blatt Papier gefaltet werden?

- (a) Ungefähr 20 Mal.
- (b) Ungefähr 30 Mal.
- (c) Ungefähr 40 Mal.
- (d) Ungefähr 50 Mal.

Aufgabe 3

Frage 4 (4 Punkte)

Ein Projekt benötigt eine Anfangsinvestition von 10'000 CHF. Nach einem Jahr generiert das Projekt eine Auszahlung in Höhe von 5'000 CHF und nach zwei Jahren eine Auszahlung in Höhe von 10'000 CHF.

Der interne Zinssatz des Projekts ist ungefähr

- (a) 5%.
- (b) 10%.
- (c) 20%.
- (d) 30%.

Aufgabe 3**Frage 5 (3 Punkte)**

Gegeben sei die Funktion $f : D_f \rightarrow \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto z = f(x, y) = \frac{\ln(x^2+y^2-1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}$.

- (a) Der Definitionsbereich von f ist das Innere (ohne Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1.
- (b) Der Definitionsbereich von f ist das Innere (ohne Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 2.
- (c) Der Definitionsbereich von f ist das Innere (ohne Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 2, ohne das Innere (mit Rand) des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1.
- (d) Der Definitionsbereich von f ist die leere Menge.

Aufgabe 3**Frage 6 (3 Punkte)**

Sei f eine Funktion zweier reellen Variablen gegeben durch:

$$f : \mathbb{R}_{++}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad (x, y) \mapsto z = f(x, y) = 10 x^\alpha y^{1-\alpha},$$

wobei $\alpha \in (0, 1)$.

Die Steigung der Tangente an die Niveaulinie von f am Punkt $(x_0, y_0) = (1, 1)$ ist gleich -0.5.

Dann folgt:

- (a) $\alpha = \frac{1}{6}$.
- (b) $\alpha = \frac{1}{3}$.
- (c) $\alpha = \frac{1}{2}$.
- (d) $\alpha = \frac{2}{3}$.

Aufgabe 3**Frage 7 (3 Punkte)**

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \ln \left(x^3 \sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11} y^{15}} \right) - \frac{13}{3} \ln(x) \quad \text{für } x > 0, y > 0.$$

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- (a) f ist homogen von Grad 5.
- (b) f ist linear homogen.
- (c) f ist homogen von Grad 0.
- (d) f ist nicht homogen.

Aufgabe 3**Frage 8 (3 Punkte)**

Sei f eine Funktion einer reellen Variablen, definiert als $f(x) = x^\alpha$ für $\alpha > 0$, und sei g eine Funktion zweier reellen Variablen, die strikt positiv und homogen von Grad κ ist.

Wir definieren die Funktion h als $h(x, y) = f(g(x, y))$.

Welche der folgenden Aussagen ist richtig?

- (a) h ist homogen von Grad 1, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 1$.
- (b) h ist homogen von Grad 2, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 4$.
- (c) h ist homogen von Grad 3, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 7$.
- (d) h ist homogen von Grad 5, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 11$.

Prüfungen Assessment-Stufe: Herbstsemester 2019

1'200 Mathematik A

Antwortbogen Multiple-Choice-Fragen (Seite 1 von 2)

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (4 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
1.

Frage 2: Single-Choice (3 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
2.

Frage 3: Single-Choice (3 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
3.

Frage 4: Single-Choice (4 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
4.

Frage 5: Single-Choice (3 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
5.

Frage 6: Single-Choice (3 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
6.

Frage 7: Single-Choice (3 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
7.

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
8.

Frage 9: Single-Choice (3 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
9.

Frage 10: Single-Choice (2 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
10.

Prüfungen Assessment-Stufe: Herbstsemester 2019

1'200 Mathematik A

Antwortbogen Multiple-Choice-Fragen (Seite 2 von 2)

Aufgabe 3 (28 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (4 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
1.

Frage 2: Single-Choice (4 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
2.

Frage 3: Single-Choice (4 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
3.

Frage 4: Single-Choice (4 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
4.

Frage 5: Single-Choice (3 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
5.

Frage 6: Single-Choice (3 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
6.

Frage 7: Single-Choice (3 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
7.

Frage 8: Single-Choice (3 Punkte)

- (a) (b) (c) (d)
8.