Mathematik A
Musterlösungen Prüfung Herbstsemester 2019

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

28. Januar 2020

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil 1: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a1) (**2 Punkte**).
Die Funktion Q beschreibt, wie die Nachfrage $d = D(p)$ des institutionellen Anlegers den Marktpreis $p = P(d)$ der Aktie beeinflusst. Mathematisch gesprochen ist die Funktion Q die Verknüpfung der Funktionen P und D, d.h., $Q = P \circ D$. Es gilt:

$$Q(p) = (P \circ D)(p) = P(D(p)) = \frac{1}{4} + \frac{1}{2}\left(4 - 2\,e^{p-1}\right) = \frac{1}{4} + 2 - e^{p-1} = \frac{9}{4} - e^{p-1}.$$

(a2) (**6 Punkte**).
In dieser Aufgabe möchten wir denjenigen Preis $p^\star \in \left[0, \frac{3}{2}\right]$ der Aktie herausfinden, der durch den Kauf von $D(p^\star)$ Aktien durch den institutionellen Investor unverändert bleibt. Mathematisch ausgedrückt muss $p^\star$ die sogenannte Fixpunktgleichung $p^\star = Q(p^\star)$ erfüllen. Um die Existenz und Eindeutigkeit von $p^\star$ zeigen zu können, definieren wir $f(p) = Q(p) - p = \frac{9}{4} - e^{p-1} - p$ und wenden Bolzano's Nullstellensatz auf $f(p) = 0$ an. In der Tat gilt:

$$p = Q(p) \Leftrightarrow f(p) = 0.$$

Wir erhalten:

$$f(p) = 0 \Leftrightarrow Q(p) - p = 0 \Leftrightarrow \frac{9}{4} - e^{p-1} - p = 0.$$

Da f stetig ist, hat die Gleichung $f(p) = 0$ nach dem Nullstellensatz mindestens eine Lösung im Intervall $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, gegeben, dass das Vorzeichen f zwischen 0 und $\frac{3}{2}$ wechselt. Es gilt:

$$f(0) = \frac{9}{4} - e^{0-1} - 0 = \frac{9}{4} - e^{-1} \approx 1.882121 > 0,$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{9}{4} - e^{\frac{3}{2}-1} - \frac{3}{2} = \frac{3}{4} - e^{\frac{1}{2}} \approx -0.8987213 < 0.$$

Daher hat die Gleichung $f(p) = 0$ eine Lösung im Intervall $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

Weiterhin ist die Lösung eindeutig, wenn die Funktion f streng monoton ist. Es gilt:

$$f'(p) = -e^{p-1} - 1 < 0 \qquad \text{für alle Preise } p.$$

Die Funktion f ist also streng monoton fallend auf dem Intervall $\left[0, \frac{3}{2}\right]$ und besitzt daher eine eindeutige Nullstelle auf $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

Zusammengefasst gilt: Die Gleichung $f(p) = 0$ hat eine eindeutige Lösung auf $\left[0, \frac{3}{2}\right]$, d.h., $p = Q(p)$ hat eine eindeutige Lösung auf $\left[0, \frac{3}{2}\right]$. Diese Lösung ist der gesuchte, eindeutige Fixpunkt $p^\star$ der Funktion Q auf $\left[0, \frac{3}{2}\right]$.

(a3) (**6 Punkte**).
In dieser Aufgabe müssen wir ein Taylorpolynom 2. Ordnung bestimmen, um die Lösung der Fixpunktgleichung $p = Q(p)$ zu approximieren.
Es existieren zwei Lösungmöglichkeiten: (i) wir approximieren die Funktion Q mit ihrem Taylorpolynom 2. Ordnung $P_{Q,2}$ im Punkt $p_0 = 1$ und lösen die Gleichung $p = P_{Q,2}(p)$; oder (ii) wir approximieren die Funktion f, definiert als $f(p) = Q(p) - p = \frac{9}{4} - e^{p-1} - p$, mit ihrem

Taylorpolynom 2. Ordnung $P_{f,2}$ im Punkt $p_0 = 1$ und lösen die Gleichung $P_{f,2}(p) = 0$.

(i) Das Taylorpolynom 2. Ordnung $P_{Q,2}$ von Q in $p_0 = 1$ ist:

$$P_{Q,2}(p) = Q(p_0) + Q'(p_0)\,(p - p_0) + \frac{1}{2}\,Q''(p_0)\,(p - p_0)^2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} Q(p_0) = Q(1) &= \frac{9}{4} - e^{1-1} = \frac{9}{4} - 1 = \frac{5}{4}, \\ Q'(p) = -e^{p-1} &\Rightarrow Q'(1) = -e^{1-1} = -1, \\ Q''(p) = -e^{p-1} &\Rightarrow Q''(1) = -e^{1-1} = -1. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$P_{Q,2}(p) = \frac{5}{4} - 1\cdot(p-1) - \frac{1}{2}\cdot(p-1)^2 = \frac{5}{4} - p + 1 - \frac{1}{2}\,p^2 + p - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\,p^2 + \frac{7}{4}.$$

Wir erhalten:

$$p = P_{Q,2}(p) \Leftrightarrow p = -\frac{1}{2}\,p^2 + \frac{7}{4} \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\,p^2 - p + \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow -2\,p^2 - 4\,p + 7 = 0 \Leftrightarrow p = -1 \pm \sqrt{\frac{9}{2}}.$$

Da $-1 - \sqrt{\frac{9}{2}} \notin \left[0, \frac{3}{2}\right]$, bleibt lediglich $-1 + \sqrt{\frac{9}{2}} \approx 1.12132$ und es gilt:

$$p^\star \approx 1.12132.$$

(ii) Das Taylorpolynom 2. Ordnung $P_{f,2}$ von f bei $p_0 = 1$ ist:

$$P_{f,2}(p) = f(p_0) + f'(p_0)\,(p - p_0) + \frac{1}{2}\,f''(p_0)\,(p - p_0)^2.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(p_0) = f(1) &= \frac{9}{4} - e^{1-1} - 1 = \frac{9}{4} - 1 - 1 = \frac{1}{4}, \\ f'(p) = -e^{p-1} - 1 &\Rightarrow f'(1) = -e^{1-1} - 1 = -2, \\ f''(p) = -e^{p-1} &\Rightarrow f''(1) = -e^{1-1} = -1. \end{aligned}$$

Damit folgt:

$$P_{f,2}(p) = \frac{1}{4} - 2\cdot(p-1) - \frac{1}{2}\cdot(p-1)^2 = \frac{1}{4} - 2\,p + 2 - \frac{1}{2}\,p^2 + p - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}\,p^2 - p + \frac{7}{4}.$$

Wir erhalten:

$$P_{f,2}(p) = 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{2}\,p^2 - p + \frac{7}{4} = 0 \Leftrightarrow -2\,p^2 - 4\,p + 7 = 0 \Leftrightarrow p = -1 \pm \sqrt{\frac{9}{2}}.$$

Da $-1 - \sqrt{\frac{9}{2}} \notin \left[0, \frac{3}{2}\right]$, bleibt lediglich $-1 + \sqrt{\frac{9}{2}} \approx 1.12132$ und es gilt:

$$p^\star \approx 1.12132.$$

(b) (**6 Punkte**).

In dieser Aufgabe arbeiten wir mit der Beschreibung der Rechenleistung eines Computers, die benötigt wird, um eine bestimme Aufgabe in diskreten Zeitperioden zu bewältigen. Ursprünglich, d.h. bevor der Computer aufgestockt wird, benötigt die Berechnung der Aufgabe die komplette Rechenleistung der ersten 15 Perioden. Demnach ist die benötigte Rechenleistung gegeben durch

$$s_{15} = a_1 + \cdots + a_{15} = \sum_{n=1}^{15} a_n,$$

d.h., die 15. Partialsumme der Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ wird charakterisiert durch $a_1 = 10$ und $a_{n+1} = (1 + 2\%)\, a_n$, und ist folglich eine geometrische Folge mit $a_1 = 10$ und $q = 1 + 2\% = 1.02$. Damit gilt:

$$s_{15} = \sum_{n=1}^{15} a_1\, q^{n-1} = a_1 \frac{1-q^{15}}{1-q} = 10 \frac{1-1.02^{15}}{1-1.02} \approx 172.9342.$$

Nachdem der Computer verbessert wurde, lässt sich die Entwicklung der Rechenleistung mittels der Folge $\tilde{a}_1 = 15$ und $\tilde{a}_{n+1} = (1 + 3\%)\, \tilde{a}_n$ beschreiben. Auch $\{\tilde{a}_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine geometrische Folge, wobei $\tilde{a}_1 = 15$ und $\tilde{q} = 1 + 3\% = 1.03$ gilt.
Demnach erfüllt die Anzahl n der Perioden, die zur Berechnung der Aufgabe auf dem aufgestockten Computer benötigt werden, folgende Gleichung:

$$\tilde{s}_n \overset{!}{=} s_{15} \;\Leftrightarrow\; \tilde{a}_1 + \cdots + \tilde{a}_n = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k \overset{!}{=} s_{15}\,.$$

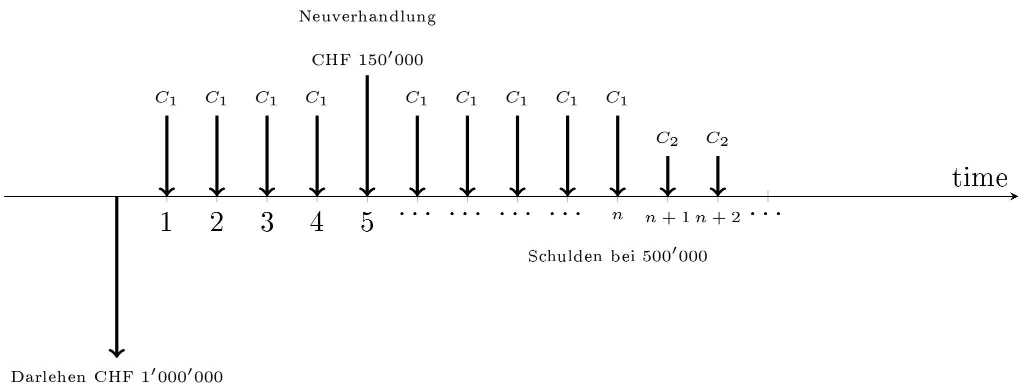
Es gilt:

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_k = \sum_{k=1}^{n} \tilde{a}_1\, \tilde{q}^{k-1} \quad &= \quad \tilde{a}_1 \frac{1-\tilde{q}^n}{1-\tilde{q}} = s_{15} \\
&\Leftrightarrow \quad 15 \frac{1-1.03^n}{1-1.03} = s_{15} \\
&\Leftrightarrow \quad 1 - 1.03^n = s_{15} \frac{1-1.03}{15} \\
&\Leftrightarrow \quad 1.03^n = 1 - s_{15} \frac{1-1.03}{15} = 1 - 10 \frac{1-1.02^{15}}{1-1.02} \frac{1-1.03}{15} = 1.02^{15} \\
&\Leftrightarrow \quad n = \frac{\ln\left(1.02^{15}\right)}{\ln(1.03)} = 15 \frac{\ln(1.02)}{\ln(1.03)} \approx 10.0491.
\end{aligned}$$

Der verbesserte Computer braucht also etwas mehr als 10 Perioden, um die Berechnung der Aufgabe abzuschliessen. Da der Start der Berechnung durch das Aufstocken um 3 Perioden aufgeschoben werden muss, spart das Rechenzentrum allerdings nur etwa $15-10-3 = 2$ Perioden, wenn es für die Berechnung den verbesserten anstelle des alten Computers verwendet.

(c) (**10 Punkte**).

(c1)



(c2) Der ursprüngliche Plan besteht darin, C_1 über 10 Jahre am Ende jeden Jahres zurückzuzahlen, um so die Schulden von $1'000'000$ CHF auf $750'000$ CHF zu reduzieren. Bei einem Zinssatz von 1% wäre der im Jahr 10 zur Schuldenreduktion nötige Betrag gegeben durch

$$1'000'000\,(1+1\%)^{10} - 750'000 \approx 354'622.10.$$

Dieser Betrag muss nun dem Wert einer nachschüssigen Rente mit jährlichen Zahlungen C_1 nach 10 Jahren entsprechen. Folglich gilt:

$$354'622.10 = \underbrace{C_1\,\frac{(1+1\%)^{10}-1}{1\%}}_{\text{Endwert der nachschüssen Rente im Jahr 10}} \Leftrightarrow C_1 = \frac{354'622.10}{\frac{(1+1\%)^{10}-1}{1\%}} \approx 33'895.50 \text{ (CHF)}.$$

(c3) Der Schuldenstand nach 5 Jahren entspricht der über 5 Jahre verzinsten Kreditsumme abzüglich der über 5 Jahre getätigten Rückzahlungen, d.h. abzüglich dem (End-) Wert von 5 Zahlungen C_1 am Ende jeden Jahres, sowie abzüglich der zusätzlichen $150'000 - C_1$ CHF im Jahr 5. Es gilt:

Schuldenstand am Ende des 5. Jahres

$$\begin{aligned}
&= \underbrace{1'000'000\,(1+1\%)^5}_{\text{Wert der Kreditsumme, verzinst über 5 Jahre}} - \underbrace{C_1\,\frac{(1+1\%)^5-1}{1\%}}_{\text{Wert der jährl. Zahlungen } C_1 \text{ nach 5 Jahren}} - \underbrace{(150'000 - C_1)}_{\text{zusätzl. Zahlung am Ende des 5. Jahres}} \\
&\approx 1'051'010 - 33'895.50\,\frac{(1+1\%)^5-1}{1\%} - 150'000 + 33'895.50 \\
&\approx 1'051'010 - 172'901.10 - 150'000 + 33'895.50 \\
&= 762'004.40 \text{ (CHF)}.
\end{aligned}$$

(c4) Nach 5 Jahren wird der Zinssatz von 1% auf 0.5% reduziert. Trotzdem werden weiterhin Zahlungen C_1 am Ende jeden Jahre geleistet bis der Schuldenstand in n Jahren $500'000$ CHF erreicht. Es gilt:

$$\begin{aligned}
\underbrace{500'000}_{\text{angepeilter Schuldenstand nach } n \text{ Jahren}} &= \underbrace{762'004.4\,(1+0.5\%)^n}_{\text{Wert der Schulden, verzinst über } n \text{ Jahren}} - \underbrace{C_1\,\frac{(1+0.5\%)^n-1}{0.5\%}}_{\text{Wert der jährl. Zahlungen } C_1 \text{ nach } n \text{ Jahren}} \\
&= \left(762'004.4 - \frac{C_1}{0.5\%}\right)(1+0.5\%)^n + \frac{C_1}{0.5\%}.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$(1+0.5\%)^n = \frac{500'000 - \frac{C_1}{0.5\%}}{762'004.4 - \frac{C_1}{0.5\%}} \Leftrightarrow n = \frac{\ln\left(\frac{500'000 - \frac{C_1}{0.5\%}}{762'004.4 - \frac{C_1}{0.5\%}}\right)}{\ln(1+0.5\%)} \approx 8.54.$$

Das angestrebte Schuldenniveau wird also 9 Jahre nach der Neuverhandlung der Konditionen erreicht.

Um genau zu sein, nach 9 Jahren ist der Schuldenstand kleiner als 500′000 CHF. Es gilt:

$$\underbrace{762'004.4\,(1+0.5\%)^9}_{\text{Wert der Schulden, verzinst über 9 Jahren}} \quad - \quad \underbrace{C_1\,\frac{(1+0.5\%)^9 - 1}{0.5\%}}_{\text{Wert der jährl. Zahlungen } C_1 \text{ nach 9 Jahren}} \quad = 485'756.10 \text{ (CHF)}.$$

Beide Antworten, sowohl 8.54 Jahre als auch 9 Jahre, werden akzeptiert. In Teilaufgabe (c5) wird von einem Schuldenstand von 500′000 CHF ausgegangen.

(c5) Nachdem die angestrebten 500′000 CHF erreicht wurden, werden am Ende jeden Jahres C_2 CHF gezahlt, um das Schuldenniveau konstant bei 500′000 CHF zu halten. Das bedeutet nichts anderes, als dass der Betrag C_2 der jährlichen Zinszahlung für die Schulden entspricht, also

$$C_2 = 0.5\% \cdot 500'000 = 2'500 \text{ (CHF)}.$$

(d) (**10 Punkte**).

(d1) Der Gewinn entspricht den Erträgen abzüglich der Kosten. Im Falle eines Verkaufspreises von $p > 20$, ergeben sich die Erträge als

$$q_d(p) \cdot p \quad \text{(Nachfrage bzw. abgesetzte Menge mal Stückpreis)}$$

und die Kosten als

$$q_d(p) \cdot 20 \quad \text{(Nachfrage bzw. produzierte Menge mal Stückkosten)},$$

da die Produktionskosten pro Tablet 20 (USD) betragen. Damit folgt:

$$\text{Gewinn} = G(p) = \text{Erträge}-\text{Kosten} = q_d(p)\cdot p - q_d(p)\cdot 20 = q_d(p)\,(p-20) = \frac{(15'840 - 30\,p)\,(p-20)}{p+50}.$$

(d2) Die Elastizität des Gewinns in Abhängigkeit vom Verkaufspreis ist gegeben durch:

$$\varepsilon_G(p) = p\,\frac{G'(p)}{G(p)}.$$

Es gilt:

$$\begin{aligned}
G'(p) &= \frac{(-30\,(p-20) + (15'840 - 30\,p))\;(p+50) - (15'840 - 30\,p)\,(p-20)}{(p+50)^2} \\
&= \frac{-30\,(p-20)\,(p+50) + (15'840 - 30\,p)\,(p+50-p+20)}{(p+50)^2} \\
&= \frac{-30\,(p-20)\,(p+50) + 70\,(15'840 - 30\,p)}{(p+50)^2}.
\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\begin{aligned}\varepsilon_G(p) &= p\,\frac{-30\,(p-20)\,(p+50)+70\,(15'840-30\,p)}{(p+50)^2}\,\frac{p+50}{(15'840-30\,p)\,(p-20)}\\ &= \frac{p}{p-528}+\frac{70\,p}{(p+50)\,(p-20)}.\end{aligned}$$

Alternativ können wir die Änderungsrate von $G(p)$ mittels der logarithmischen Ableitung bestimmen und anschliessend das Ergebnis mit p multiplizieren, um die Elastizität $\varepsilon_G(p)$ zu erhalten:

$$\begin{aligned}\frac{G'(p)}{G(p)}=[\ln(G(p))]' &= \left[\ln\left(\frac{(15,840-30\,p)\,(p-20)}{p+50}\right)\right]'\\ &= [\ln(15,840-30\,p)+\ln(p-20)-\ln(p+50)]'\\ &= \frac{-30}{15,840-30\,p}+\frac{1}{p-20}-\frac{1}{p+50}\\ &= \frac{1}{p-528}+\frac{1}{p-20}-\frac{1}{p+50}.\end{aligned}$$

Damit folgt:

$$\varepsilon_G(p)=p\,\frac{G'(p)}{G(p)}=\frac{p}{p-528}+\frac{p}{p-20}-\frac{p}{p+50}.$$

(d3) Die relative Änderung des Gewinns bei einer Preissteigerung von 100 (USD) auf 105 (USD) ist gegeben durch:

$$\frac{G(105)-G(100)}{G(100)}.$$

Es gilt:

$$\frac{G(105)-G(100)}{G(100)}\approx\varepsilon_G(100)\,\frac{105-100}{100}=\varepsilon_G(100)\cdot 5\%.$$

Wir erhalten:

$$\varepsilon_G(100)=\frac{100}{100-528}+\frac{70\cdot 100}{(100+50)\,(100-20)}\approx 0.35$$

und folglich:

$$\frac{G(105)-G(100)}{G(100)}\approx 0.35\cdot 5\%=1.75\%.$$

Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 2

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☒
2.	☐	☐	☒	☐
3.	☐	☐	☐	☒
4.	☐	☐	☒	☐
5.	☒	☐	☐	☐
6.	☐	☒	☐	☐
7.	☒	☐	☐	☐
8.	☐	☐	☒	☐
9.	☐	☐	☐	☒
10.	☐	☒	☐	☐

1. Die Antwort ist (d). Die folgende Wahrheitstabelle zeigt, dass nur die Aussage in (d) genau dann wahr ist, wenn A und B verschieden sind:

	A	W	W	F	F
	B	W	F	W	F
	$A \vee B$	W	W	W	F
	$A \wedge B$	W	F	F	F
	$A \Rightarrow B$	W	F	W	W
	$\neg(A \wedge B)$	F	W	W	W
(a)	$A \vee B$	W	W	W	F
(b)	$A \wedge B$	W	F	F	F
(c)	$\neg(A \Rightarrow B)$	F	W	F	F
(d)	$(A \vee B) \wedge (\neg(A \wedge B))$	F	W	W	F

2. Die Antwort ist (c). Von Interesse sind die beiden mittleren Fällen, bei welchen genau eines der beiden Ereignisse wahr ist. Wenn Hans nicht zur Party geht, ist A falsch. Deshalb ist die Implikation $A \Rightarrow B$ wahr, unabhängig, ob B wahr oder falsch ist. Weiterhin ist $A \wedge B$ falsch, $A \vee B$ kann wahr oder falsch sein (abhängig von B), und auch $A \Leftrightarrow B$ kann wahr oder falsch sein (abhängig von B).

3. Die Antwort ist (d). (a) und (c) sind im Allgemeinen falsch, wie das Beispiel $a_n = \frac{1}{n}$ zeigt. In diesem Fall ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt, monoton und konvergent. Jedoch ist dann die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, definiert durch $b_n = \frac{1}{a_n} = n$, weder beschränkt noch konvergent. Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton und wechselt ausserdem das Vorzeichen, so ist $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ nicht monoton. Beispielsweise ist die Folge $a_n = \frac{1}{n} - 0.9$ beschränkt, monoton und konvergent, während $b_n = \frac{1}{a_n}$ beschränkt und konvergent aber nicht monoton ist.

4. Die Antwort ist (c). $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ sind beides geometrische Folgen mit Parameter q und $\frac{q}{2}$. Deshalb folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \frac{a_1}{1-q} \quad \text{und} \quad \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \frac{b_1}{1-\frac{q}{2}}.$$

Die Bedingung ist erfüllt, wenn $a_1 = 2\,b_1$ und $1 - q = 2 - q$.

Es folgt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k = \sum_{k=1}^{\infty} b_k \quad \Leftrightarrow \quad \frac{a_1}{1-q} = \frac{b_1}{1-\frac{q}{2}} = \frac{2\,b_1}{2-q}.$$

Falls $b_1 = 2\,a_1$, dann gilt:

$$\frac{a_1}{1-q} = \frac{4\,a_1}{2-q} \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = 0, q \in (-1,1) \\ a_1 \neq 0, q = \frac{2}{3} \end{cases}.$$

5. Die Antwort ist (a). Marc zahlt seine Schulden vor Lucie zurück. Genauer gesagt kann Mark seine Schulden in einem endlichen Zeitrahmen zurückzahlen, weil seine jährliche Rückzahlungen höher sind als die jährlichen Zinszahlungen:

$$1'000'000 \cdot 1\% = 10'000 < 10'500.$$

Dagegen wird Lucie ihre Schulden nie zurückzahlen können, weil ihre jährlichen Rückzahlungen nicht einmal den jährlichen Zins abdecken:

$$800'000 \cdot 1.2\% = 9'600 > 9'500.$$

6. Die Antwort ist (b). Weil h nur definiert ist, wenn g definiert ist, folgt $D_h \subseteq D_g$.

7. Die Antwort ist (a). Die Elastizität ist gegeben als:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = x\,\rho_f(x)$$

wobei $\rho_f(x)$ die Wachstumsrate ist. Deshalb folgt:

$$\rho_f(x) = \frac{\varepsilon_f(x)}{x}.$$

Weil $\varepsilon_f(x) = 2$, folgt

$$\rho_f(x) = \frac{2}{x}.$$

Weil zudem $D_f \subseteq \mathbb{R}_{++}$, folgt, dass ρ_f streng monoton wachsen ist.

8. Die Antwort ist (c). Die Elastizität ist gegeben als:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)}.$$

Also folgt mit $x_0 \neq 0$, $f(x) > 0$ für alle x, und $\varepsilon_f(x_0) = 0$, dass

$$f'(x_0) = 0.$$

Deshalb ist x_0 ein stationärer Punkt. Weil f streng konkav ist, ist x_0 ein lokales Maximum (und sogar ein globales Maximum, aber jedes globale Maximum ist immer auch ein lokales Maximum).

9. Die Antwort ist (d). Der Restterm ist im Allgemeinen weder fallend noch steigend in der Ordnung des Taylorpolynoms. Beide Fälle sind möglich.

10. Die Antwort ist (b). Weil f homogen von Grad 2 ist, folgt aus der Euler'schen Relation:

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) + \varepsilon_{f,y}(x,y) = 2.$$

Deshalb gilt:

$$\varepsilon_{f,x}(x,y) = 2 - \varepsilon_{f,y}(x,y) = 2 - (e^{x+y} + 1) = 1 - e^{x+y}.$$

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☒	☐	☐	☐
2.	☐	☒	☐	☐
3.	☐	☐	☒	☐
4.	☐	☐	☐	☒
5.	☐	☐	☒	☐
6.	☐	☒	☐	☐
7.	☐	☐	☒	☐
8.	☐	☒	☐	☐

1. Die Antwort ist (a). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 1+}\left(\frac{1}{x-1}-\frac{1}{\ln(x)}\right) &= \lim_{x\to 1+}\frac{\ln(x)-(x-1)}{(x-1)\,\ln(x)} \\
&\overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 1+}\frac{\frac{1}{x}-1}{\ln(x)+(x-1)\,\frac{1}{x}} \\
&= \lim_{x\to 1+}\frac{1-x}{x\,\ln(x)+(x-1)} \\
&\overset{(\star)}{=} \lim_{x\to 1+}\frac{-1}{\ln(x)+x\,\frac{1}{x}+1} \\
&= \lim_{x\to 1+}\frac{-1}{\ln(x)+2} \\
&= -\frac{1}{2}.
\end{aligned}$$

In $(\star)$ haben wir die Regel von L'Hôpital angewandt.

2. Die Antwort ist (b). Es gilt:

$$\lim_{x\to 0+} x^x = \lim_{x\to 0+} e^{\ln(x^x)} = \lim_{x\to 0+} e^{x\,\ln(x)} = e^{\lim_{x\to 0+}(x\,\ln(x))}.$$

Weil

$$\lim_{x\to 0+}(x\,\ln(x)) = \lim_{x\to 0+}\frac{\ln(x)}{\frac{1}{x}} \overset{\star}{=} \lim_{x\to 0+}\frac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{x^2}} = \lim_{x\to 0+}(-x) = 0$$

gilt

$$\lim_{x\to 0+} x^x = e^{\lim_{x\to 0+}(x\,\ln(x))} = e^0 = 1.$$

In $(\star)$ haben wir die Regel von L'Hôpital angewendet.

3. Die Antwort ist (c). Sei a_n die Papierdicke nach dem n-ten Mal Falten. Dann gelten

$$a_0 = 0.5 \text{ (Millimeter)} = 0.5\,10^{-6} \text{ (Kilometer)}$$

und

$$a_n = 2\,a_{n-1}.$$

Deshalb ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Folge mit $a_0 = 0.5\cdot 10^{-6}$ und $q = 2$. Daraus folgen

$$a_n = a_0\,q^n$$

und

$$a_n \geq 400,000 = 4 \cdot 10^5 \Leftrightarrow 0.5\,10^{-6}\,2^n \geq 4 \cdot 10^5.$$

Es folgt also, dass:

$$2^n \geq \frac{4 \cdot 10^5}{0.5 \cdot 10^{-6}} = 8 \cdot 10^{11} \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln(8 \cdot 10^{11})}{\ln(2)} \approx 39.54.$$

Deshalb muss das Papier mindestens 40-mal gefaltet werden.

4. Die Antwort ist (d). Für den internen Zinssatz r muss der Nettobarwert des Projekts null sein. Es gilt also:

$$-10'000 + \frac{5'000}{1+r} + \frac{10'000}{(1+r)^2} = 0.$$

Durch Multiplizieren der Gleichung mit $\frac{(1+r)^2}{5'000}$ kommen wir auf

$$-2\,(1+r)^2 + (1+r) + 2 = 0 \Leftrightarrow 1+r = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2+16}}{-4} = \frac{-1 \pm \sqrt{17}}{-4}.$$

Deshalb ist $1 + r \approx 1.3$, d.h. $r \approx 30\%$.

5. Die Antwort ist (c). Es gilt:

$$(x, y) \in D_f \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 1 > 0 \text{ und } 4 - x^2 - y^2 > 0.$$

Die erste Bedingung entspricht $x^2 + y^2 > 1^2$, d.h. alle Punkte (x, y) ausserhalb des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 1. Die zweite Bedingung entspricht $x^2 + y^2 < 2^2$, d.h. alle Punkte (x, y) innerhalb des Kreises mit Mittelpunkt $(0, 0)$ und Radius 2.

6. Die Antwort ist (b). Der Satz von der impliziten Funktion besagt, dass die Steigung der Tangente an der Niveaulinie von f bei $(x_0, y_0) = (1, 1)$ gegeben ist durch:

$$-\frac{f_x(x_0, y_0)}{f_y(x_0, y_0)} = -\frac{10\,\alpha\,x_0^{\alpha-1}\,y^{1-\alpha}}{10\,(1-\alpha)\,x_0^{\alpha}\,y_0^{-\alpha}} \overset{(x_0,y_0)=(1,1)}{=} -\frac{\alpha}{1-\alpha}.$$

Daraus folgt:

$$-\frac{\alpha}{1-\alpha} = -0.5 \Leftrightarrow \alpha = 0.5\,(1-\alpha) \Leftrightarrow 1.5\,\alpha = 0.5 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1}{3}.$$

7. Die Antwort ist (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= \ln\left((\lambda\,x)^3\,\sqrt[3]{(\lambda\,y)^4} + \sqrt[6]{(\lambda\,x)^{11}\,(\lambda\,y)^{15}}\right) - \frac{13}{3}\,\ln(\lambda\,x) \\
&= \ln\left(\lambda^{\frac{13}{3}}\,x^3\,\sqrt[3]{y^4} + \lambda^{\frac{13}{3}}\,\sqrt[6]{x^{11}\,y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(x) - \frac{13}{3}\,\ln(\lambda) \\
&= \ln\left(\lambda^{\frac{13}{3}}\right) + \ln\left(x^3\,\sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}\,y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(x) - \frac{13}{3}\,\ln(\lambda) \\
&= \frac{13}{3}\,\ln(\lambda) + \ln\left(x^3\,\sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}\,y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(x) - \frac{13}{3}\,\ln(\lambda) \\
&= \ln\left(x^3\,\sqrt[3]{y^4} + \sqrt[6]{x^{11}\,y^{15}}\right) - \frac{13}{3}\ln(x) \\
&= f(x, y) \\
&= \lambda^0\,f(x, y).
\end{aligned}$$

Es folgt, dass f homogen von Grad 0 ist.

8. Die Antwort ist (b). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
h(\lambda\, x, \lambda\, y) &= f(g(\lambda\, x, \lambda\, y)) \\
&= f(\lambda^{\kappa}\, g(x, y)) \\
&= (\lambda^{\kappa}\, g(x, y))^{\alpha} \\
&= \lambda^{\alpha\,\kappa}\, g(x, y)^{\alpha} \\
&= \lambda^{\alpha\,\kappa}\, f(g(x, y)) \\
&= \lambda^{\alpha\,\kappa}\, h(x, y).
\end{aligned}$$

Deshalb ist f homogen vom Grad $\alpha\,\kappa$ und:

(a) $\alpha\,\kappa = 0.5 = 0.5 \cdot 1$, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 1$,

(b) $\alpha\,\kappa = 2 = 0.5 \cdot 4$, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 4$,

(c) $\alpha\,\kappa = 3.5 = 0.5 \cdot 7$, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 7$,

(d) $\alpha\,\kappa = 5.5 = 0.5 \cdot 11$, falls $\alpha = 0.5$ und $\kappa = 11$.