Mathematik B
Prüfung Frühjahrssemester 2018

Prof. Dr. De Giorgi*

25. Juni 2018

Teil I: Offene Fragen (36 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (36 Punkte)

(a) (8 Punkte)

Ein Investment generiert zum Zeitpunkt t, für $t \in [0, 10]$, den stetigen Cashflow $B(t) = a\,t + 10$, wobei $a > 0$. Die Verzinsung erfolgt kontinuierlich zum Zinssatz $i = 5\%$. Bestimmen Sie den Parameter a so, dass der Barwert des Investments $1'000$ CHF beträgt.

Aufgabe 1

(a) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(b) (8 Punkte)

Die folgende Tabelle beschreibt die jährlichen Payoffs dreier Wertpapiere zu identischem Ausgangspreis, abhängig von der jeweiligen konjunkturellen Lage:

Konjunktur	Aktie 1	Aktie 2	Aktie 3
Expansion	1.5	3	m
wirtschaftliche Stabilität	1.5	2	0.5
Rezession	1.5	0.5	1.5

Ein Investor möchte die drei Wertpapiere linear zu folgendem Auszahlungsschema kombinieren:

Konjunktur	Payoff des Investors
Expansion	$2\,m$
wirtschaftliche Stabilität	1.0
Rezession	0.5

Bestimmen Sie mit Hilfe des *Gauss Verfahrens* alle möglichen Parameterwerte m, für die das gewünschte Auszahlungsschema durch eine Kombination der drei Aktien möglich ist.

Aufgabe 1

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1 (36 Punkte)

(c) (10 Punkte)

Die (fixen) Entwicklungskosten für ein neues Produkt betragen 20′000 (CHF). Jede Einheit des Produkts kann zu einem Preis von p (CHF) verkauft werden, die Produktionskosten pro Einheit betragen 2 (CHF). Sie entscheiden sich dazu, Ihr Produkt mit einer Marketingkampagne zu bewerben. Der Erfolg der Kampagne hängt von dem Betrag a (CHF), der für die Werbung ausgegeben wird, sowie dem Preis p (CHF) Ihres Produktes ab. In der Tat bestimmen Sie, dass Sie, bei einem Werbeaufwand von a (CHF) und einem Verkaufspreis von p (CHF),

$$3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p$$

Einheiten Ihres Produktes verkaufen.

Bestimmen Sie a und p so, dass Ihr Gewinn (d.h. Verkaufserlöse abzüglich Kosten, inklusive der Kosten für Werbung) maximal wird.

Aufgabe 1

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(d) (10 Punkte)
Ein Rechteck R habe seine Ecken in den Punkten $(0,0)$, $(x,0)$, $(0,y)$, und (x,y), mit $x, y > 0$. Ausserdem sei die Distanz zwischen dem Punkt (x,y) und dem Punkt $(a,0)$ gleich 4, wobei $a \in (4,8)$.

Bestimmen Sie mögliche Punkte (x,y), sodass die Fläche von R ein Extremum annimmt (also maximal oder minimal wird).

Bemerkungen:

(1) Es ist nicht nötig zu überprüfen, ob die gefundenen potentiellen Kandidaten für ein Extremum tatsächlich einen maximalen oder minimalen Flächeninhalt von R erzeugen.

(2) Die Distanz zwischen zwei Punkten $P_1 = (x_1, y_1)$ und $P_2 = (x_2, y_2)$ entspricht $d = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}$. Demnach gilt: $d^2 = (x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2$.

(3) Für diese Aufgabe müssen Sie die Terme der Lösung(en) nicht vereinfachen.

Aufgabe 1

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (64 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktion $f(x, y) = x$ hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = \frac{x^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ ihr Maximum im Punkt

(a) $P = (-6, 3)$.

(b) $P = (5, -3)$.

(c) $P = (0, 7)$.

(d) $P = (6, 3)$.

Aufgabe 2

Frage 2 (3 Punkte)

Eine zweimal differenzierbare Funktion f hat ein lokales Maximum im Punkt (x_0, y_0). Sei g die Funktion definiert durch $g(x, y) = -f(-x, -y)$ und $D_g = D_f$. Dann gilt:

(a) g hat ein lokales Maximum in (x_0, y_0).

(b) g hat ein lokales Minimum in (x_0, y_0).

(c) g hat ein lokales Maximum in $(-x_0, -y_0)$.

(d) g hat ein lokales Minimum in $(-x_0, -y_0)$.

Aufgabe 2

Frage 3 (4 Punkte)

Die Funktion f in zwei Variablen hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = x^2 + 3\,y - 7 = 0$ ein lokales Maximum im Punkt $(x_0, y_0) = (1, 2)$.

Die Steigung der Tangente an die Niveaulinie von f in $(x_0, y_0) = (1, 2)$ hat den Wert:

(a) $-\frac{3}{2}$.

(b) $-\frac{2}{3}$.

(c) $\frac{3}{2}$.

(d) $\frac{2}{3}$.

Aufgabe 2

Frage 4 (2 Punkte)

Für eine stetige Funktion f und $a, x \in D_f$ mit $a \leq x$ ist die Integralfunktion I definiert als $I(x) = \int_a^x f(t)\,dt$. Es gilt:

(a) I ist eine Stammfunktion von f.

(b) $f'(x) = I(x)$.

(c) $I'(x) = f(x) - f(a)$.

(d) I ist nicht differenzierbar.

Aufgabe 2

Frage 5 (2 Punkte)

Sei F eine Stammfunktion von f und g eine differenzierbare Funktion. Es folgt:

(a) $\int f(g(x))\,dx = F(x) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $\int f(g(x))\,dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $\int f(g(x))\,f'(x)\,dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $\int f(g(x))\,g'(x)\,dx = F(g(x)) + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 2

Frage 6 (3 Punkte)

Das unbestimmte Integral

$$\int \left[6\,x + (2\,x^2 + 1)\,e^{x^2}\right]\,dx$$

ist

(a) $x^2 + x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(b) $3\,x + 2\,x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(c) $3\,x^2 + 2\,x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

(d) $3\,x^2 + x\,e^{x^2} + C, \quad C \in \mathbb{R}.$

Aufgabe 2

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion f definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} a\,x^2 + \frac{1}{2} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

f ist eine Dichtefunktion für

(a) $a = \frac{1}{2}$.

(b) $a = \frac{3}{2}$.

(c) $a = \frac{5}{2}$.

(d) Für kein $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2

Frage 8 (4 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a\,x + \frac{1}{16} & \text{für } 0 \leq x \leq 8 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

Der Parameter a wird so gewählt, dass f die Dichtefunktion einer stetigen Zufallsvariablen X ist.
Der Erwartungswert $\mathbb{E}[X]$ von X ist:

(a) $\mathbb{E}[X] = \frac{25}{16}$.

(b) $\mathbb{E}[X] = \frac{14}{3}$.

(c) $\mathbb{E}[X] = -\frac{5}{3}$.

(d) $\mathbb{E}[X] = \frac{7}{3}\,a$.

Aufgabe 2

Frage 9 (2 Punkte)

Die Vektoren $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ seien orthogonal und $\mathbf{a}$ habe die Länge $\|\mathbf{a}\| = 3$. Dann gilt:

(a) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 0$.

(b) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 3$.

(c) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = 9$.

(d) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b})$ kann ohne Wissen über die Komponenten von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{b}$ nicht bestimmt werden.

Aufgabe 2

Frage 10 (2 Punkte)

Gegeben seien die Vektoren:

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 8 \end{pmatrix}, \mathbf{e} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Welches der folgenden Systeme ist eine Basis des $\mathbb{R}^3$?

(a) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}\}$.

(b) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{d}\}$.

(c) $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{e}\}$.

(d) $\{\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}, \mathbf{e}\}$.

Aufgabe 2

Frage 11 (2 Punkte)

A sei eine 7×5 Matrix. Das System von linearen Gleichungen $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ habe unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum habe die Dimension 3. Dann gilt:

(a) $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$.

(b) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 2$.

(c) $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 2$.

(d) $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A; \mathbf{b}) = 3$.

Aufgabe 2

Frage 12 (2 Punkte)

A und B seien reguläre Matrizen. Ausserdem sei A symmetrisch. Der Ausdruck

$$B^T\,(AB)^T\,(B^{-1}A^{-1})^T\,B\,(AB)^{-1}$$

entspricht:

(a) $(A^T\,B^T)^{-1}$.

(b) $(B^{-1}\,A)^T$.

(c) $(A^{-1}\,B)^T$.

(d) Keinem der obigen Terme.

Aufgabe 3 (32 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

X sei eine stetige Zufallsvariable mit Dichtefunktion

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2}{3}\,x + \sqrt{x} & \text{für } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

und Erwartungswert

$$\mathbb{E}\left[X\right] = \frac{28}{45}.$$

Dann hat das Integral $\int_0^1 (x+1)\, f(x)\, dx$ den Wert:

(a) $\frac{28}{45}$.

(b) $\frac{73}{45}$.

(c) $\frac{12}{45}$.

(d) $\frac{52}{45}$.

Aufgabe 3

Frage 2 (4 Punkte)

Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t \\ t-1 \\ -6 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} t+5 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ orthogonal und die Länge von $\mathbf{u}$ gleich $\sqrt{37}$?

(a) $t = -5$.

(b) $t = 0$.

(c) $t = 1$.

(d) Für kein $t \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 3

Frage 3 (3 Punkte)

Die 3×4 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 1.

(b) hat Rang 2.

(c) hat Rang 3.

(d) hat Rang 4.

Aufgabe 3

Frage 4 (5 Punkte)

Gegeben sei die 3×3 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$

(d) A ist singulär.

Aufgabe 3

Frage 5 (4 Punkte)

Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Die Matrix A^2 hat den Eigenwert:

(a) 2.

(b) 4.

(c) 6.

(d) 8.

Aufgabe 3

Frage 6 (4 Punkte)

Das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &y_{k+1} - (1+a)\, y_k = 2\, a, \text{ wobei } a \neq -1,\ a \neq 0, \\ &y_0 = 2 \end{aligned}$$

hat die Lösung

(a) $y_k = -4\,(1+a)^k$.

(b) $y_k = 2(1+a)^k - 1$.

(c) $y_k = 4\,(1+a)^k - 2$.

(d) $y_k = 8\,(1+a)^k - 3$.

Aufgabe 3

Frage 7 (3 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$3\,(y_{k+1} - y_k) + 5 = 2\,y_{k+1} - y_k + 12$$

ist

(a) oszillierend und konvergent.

(b) oszillierend und divergent.

(c) monoton und konvergent.

(d) monoton und divergent.

Aufgabe 3

Frage 8 (5 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$2\,(a+2)\,y_{k+1} - 2\,y_k + 2\,(a^2-4) = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots,$$

mit $a \in \mathbb{R} \setminus \{-2, -1\}$, konvergiert monoton gegen 0 genau dann, wenn

(a) $a > -2$.

(b) $a > -1$.

(c) $a = 2$.

(d) $a = 1$.

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2018

2'200 Mathematik B

Antwortbogen Multiple-Choice-Fragen

Aufgabe 2 (32 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Frage 9: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
9.	☐	☐	☐	☐

Frage 10: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
10.	☐	☐	☐	☐

Frage 11: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
11.	☐	☐	☐	☐

Frage 12: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
12.	☐	☐	☐	☐

Prüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2018

2'200 Mathematik B

Antwortbogen Multiple-Choice-Fragen

Aufgabe 3 (32 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (5 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐