Mathematik B
Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2018

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

25. Juni 2018

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Offene Fragen setzen mehr als nur das Anwenden von Formeln und Gleichungen voraus, weshalb das einfache Suchen nach der richtigen Formel oftmals nicht zum Erfolg führt. Tatsächlich sollte man beim Herangehen an das Problem zunächst die Schlüsselwörter identifizieren, die auf den, im entsprechenden Kontext am hilfreichsten, mathematischen Rahmen hinweisen, und erst in einem zweiten Schritt verifizieren, ob die angegebenen Informationen im Text auch ausreichen, um spezifische mathematische Resultate anwenden zu können. Als Beispiel würde ein Text mit Inhalt "Maximierung" oder "Minimierung" auf das Anwenden von mathematischer Optimierung hindeuten und man müsste prüfen, ob das Problem mit oder ohne Nebenbedingung gestellt ist. Das Übersetzen von einem Problem, das durch einen Text beschrieben wird, in einen äquivalenten mathematischen Ausdruck nennt man *mathematische Formulierung* und ist einer der wichtigsten Schritte beim Lösen von Problemen mit Hilfe einer mathematischen Herangehensweise überhaupt. Für die offenen Fragen ist es daher notwendig, die Probleme zuerst mathematisch zu formalisieren, bevor sie mit den entsprechenden mathematischen Formeln und Gleichungen gelöst werden können.

Aufgabe 1

(a) (8 Punkte)

In dieser Aufgabe deuten die Wörter "Barwert" und "stetigen Cash Flow" auf die zu verwendenden mathematischen Hilfsmittel hin. Der Barwert entspricht der diskontierten Summe der zukünftigen Cash Flows (Abschnitt 8.2). Weil jedoch der Cash Flow in dieser Aufgabe in kontinuierlicher Weise erfolgt, müssen wir die Summe durch ein Integral ersetzen und dabei die Exponentialfunktion für das Abdiskontieren verwenden (Abschnitt 15.2). Dies führt zu folgendem mathematischen Ausdruck für den Barwert:

$$PV(10) = \int_0^{10} B(t)\, e^{-i\,t}\, dt = \int_0^{10} (a\,t + 10)\, e^{-i\,t}\, dt.$$

Bevor wir das Integral berechnen, müssen wir zuerst verstehen, wonach wir überhaupt suchen. Mit der obigen Formulierung wollen wir den Parameter a bestimmen, für den gilt, dass

$$PV(10) = 1'000.$$

Nun wird klar, wie wir vorgehen müssen: (i) Löse das Integral, um eine explizite Form für $PV(10)$ zu erhalten, (ii) benutze die Bedingung $PV(10) = 1'000$, um den Parameter a zu bestimmen.

(i) Um das Integral $\int_0^{10}(a\,t+10)\, e^{-i\,t}\, dt$ zu lösen, verwenden wir partielle Integration mit $u(t) = a\,t+10$ und $v'(t) = e^{-i\,t}$. Daraus folgt $u'(t) = a$ und $v(t) = -\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}$. Damit gilt:

$$\begin{aligned}
\int \underbrace{(a\,t+10)}_{=u(t)}\, \underbrace{e^{-i\,t}}_{=v'(t)}\, dt &= \underbrace{(a\,t+10)}_{=u(t)} \underbrace{\left(-\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}\right)}_{=v(t)} - \int \underbrace{a}_{=u'(t)} \underbrace{\left(-\frac{1}{i}\, e^{-i\,t}\right)}_{=v(t)} dt \\
&= -\frac{a\,t+10}{i}\, e^{-i\,t} + \frac{a}{i} \int e^{-i\,t}\, dt \\
&= -\frac{a\,t+10}{i}\, e^{-i\,t} - \frac{a}{i^2}\, e^{-i\,t} + C,
\end{aligned}$$

wobei $C \in \mathbb{R}$. Daraus folgt:

$$PV(10) \;=\; \int_0^{10} (a\,t+10)\, e^{-i\,t}\, dt$$

$$\begin{aligned}
&= \left[-\frac{a\,t+10}{i}\, e^{-i\,t} - \frac{a}{i^2}\, e^{-i\,t} \right]_0^{10} \\
&= -\frac{10\,a+10}{i}\, e^{-10\,i} - \frac{a}{i^2}\, e^{-10\,i} - \left(-\frac{10}{i} - \frac{a}{i^2} \right) \\
&= a \left(\frac{1}{i^2} - \frac{10}{i}\, e^{-10\,i} - \frac{1}{i^2}\, e^{-10\,i} \right) + \left(\frac{10}{i} - \frac{10}{i}\, e^{-10\,i} \right) \\
&= a \left[\frac{1}{i^2} \left(1 - e^{-10\,i}\right) - \frac{10}{i}\, e^{-10\,i} \right] + \frac{10}{i} \left(1 - e^{-10\,i}\right).
\end{aligned}$$

Insgesamt haben wir nun folgenden Ausdruck für den Barwert:

$$PV(10) = a \left[\frac{1}{i^2} \left(1 - e^{-10\,i}\right) - \frac{10}{i}\, e^{-10\,i} \right] + \frac{10}{i} \left(1 - e^{-10\,i}\right).$$

(ii) Wir benutzen nun die obige Formel und die Bedingung $PV(10) = 1'000$, um a zu berechnen:

$$\begin{aligned}
PV(10) = 1'000 \quad &\Leftrightarrow \quad a \left[\frac{1}{i^2} \left(1 - e^{-10\,i}\right) - \frac{10}{i}\, e^{-10\,i} \right] + \frac{10}{i} \left(1 - e^{-10\,i}\right) = 1'000 \\
&\Leftrightarrow \quad a = \frac{1'000 - \frac{10}{i} \left(1 - e^{-10\,i}\right)}{\frac{1}{i^2} \left(1 - e^{-10\,i}\right) - \frac{10}{i}\, e^{-10\,i}} \\
&\overset{i=0.05}{\Leftrightarrow} \quad a \approx 25.534.
\end{aligned}$$

(b) (8 Punkte)

In dieser Aufgabe deuten die Schlüsselwörter “Tabelle” und “linear kombinieren” auf die zu verwendenden mathematischen Hilfsmittel hin. “Tabelle” weist auf das Verwenden von Matrizen hin (Abschnitt 16.1) und die Frage, ob “lineares Kombinieren” von Spaltenvektoren einer Matrix einem vorgegebenen Vektor entspricht, bezieht sich auf das Problem, ob ein lineares Gleichungssystem eine Lösung besitzt oder nicht (Kapitel 18).

Der Payoff

$$\begin{pmatrix} 2\,m \\ 1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

kann durch lineares Kombinieren der drei Wertpapiere erreicht werden genau dann, wenn

$$\lambda_1 \begin{pmatrix} 1.5 \\ 1.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 3.0 \\ 2.0 \\ 0.5 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} m \\ 0.5 \\ 1.5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\,m \\ 1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

wenigstens eine Lösung $(\lambda_1^\star, \lambda_2^\star, \lambda_3^\star)$ besitzt. Weil lineare Gleichungssysteme entweder keine, eine oder unendliche viele Lösungen haben, müssen wir m so bestimmen, dass das lineare Gleichungssystem mindestens eine Lösung besitzt. Um dies zu erreichen, wenden wir das Gaußsche Eliminationsverfahren an:

$$(A,\mathbf{b}) \quad = \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1.5 & 3.0 & m & 2\,m \\ 1.5 & 2.0 & 0.5 & 1 \\ 1.5 & 0.5 & 1.5 & 0.5 \end{array}\right) \end{array} \cdot \left(\tfrac{2}{3}\right)$$

$$\to \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{2}{3}\,m & \frac{4}{3}\,m \\ \frac{3}{2} & 2 & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -\frac{3}{2}\,(I) \\ -\frac{3}{2}\,(I) \end{array}$$

$$\to \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{2}{3}\,m & \frac{4}{3}\,m \\ 0 & -1 & \frac{1}{2}-m & 1-2\,m \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}-m & \frac{1}{2}-2\,m \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ :\,(-1) \\ \\ \end{array}$$

$$\to \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & \frac{2}{3}\,m & \frac{4}{3}\,m \\ 0 & 1 & m-\frac{1}{2} & 2\,m-1 \\ 0 & -\frac{5}{2} & \frac{3}{2}-m & \frac{1}{2}-2\,m \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -2\,(II) \\ :\,(-1) \\ +\frac{5}{2}\,(II) \end{array}$$

$$\to \quad \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1-\frac{4}{3}\,m & 2-\frac{8}{3}\,m \\ 0 & 1 & m-\frac{1}{2} & 2\,m-1 \\ 0 & 0 & \frac{1}{4}+\frac{3}{2}\,m & 3\,m-2 \end{array}\right) \end{array} \quad .$$

Um m so zu bestimmen, dass der Payoff

$$\begin{pmatrix} 2\,m \\ 1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

durch lineares Kombinieren der drei Wertpapiere erreicht werden kann, müssen wir den Fall von keiner Lösungen für das lineare Gleichungssystem *ausschliessen*. Dies ist der Fall, wenn $\mathrm{rg}(A) < \mathrm{rg}(A,\mathbf{b})$, also wenn

$$\frac{1}{4} + \frac{3}{2}\,m = 0 \text{ und } 3\,m - 2 \neq 0 \Leftrightarrow m = -\frac{1}{6}.$$

Es folgt daraus, dass der Payoff

$$\begin{pmatrix} 2\,m \\ 1.0 \\ 0.5 \end{pmatrix}$$

durch lineares Kombinieren der drei Wertpapieren erreicht werden kann genau dann, wenn $m \neq -\frac{1}{6}$.

(c) (10 Punkte)
In dieser Aufgabe deutet das Wort "maximal" auf die zu verwendenden Hilfsmittel hin. Die Aufgabenstellung ist ein Optimierungsproblem, entweder mit oder ohne Nebenbedingung. Nebenbedingungen sind Bedingungen, welche die Lösungsmenge zusätzlich einschränken. In diesem Fall können jedoch die Variablen a und p frei gewählt werden, so dass ein Optimierungsproblem ohne Nebenbedingung vorliegt. Die nächste Frage ist, welche Funktion maximiert werden muss. Im Text wird erwähnt, dass der Gewinn maximiert werden soll. Der Gewinn entspricht der Differenz zwischen Verkaufserlösen und den Kosten.

Es gilt:

Einnahmen/Verkaufserlöse:

$$\underbrace{(3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p)}_{\text{Nachfrage}}\ \underbrace{p}_{\text{Preis}}$$

Kosten:

$$\underbrace{20'000}_{\text{Fixkosten}} + \underbrace{2\,(3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p)}_{\text{Produktionskosten}} + \underbrace{a}_{\text{Werbung}}$$

Daraus folgt:

$$\begin{aligned} f(a,p) &= \textbf{Gewinn} \\ &= \textbf{Verkaufserlöse} - \textbf{Kosten} \\ &= (3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p)\,p - \left[20'000 + 2\,(3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p) + a\right] \\ &= (3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p)\,(p-2) - 20'000 - a. \end{aligned}$$

Die <u>notwendigen Bedingungen</u> für ein Minimum, Maximum oder Sattelpunkt (a_0, p_0) von f sind

$$\begin{cases} f_a(a_0,p_0) = 0 \\ f_p(a_0,p_0) = 0 \end{cases}.$$

Entsprechend berechnen wir die ersten partiellen Ableitungen von f and erhalten

$$\begin{aligned} f_a(a,p) &= \frac{4}{2\sqrt{a}}\,(p-2) - 1 = \frac{2}{\sqrt{a}}\,(p-2) - 1, \\ f_p(a,p) &= -20\,(p-2) + (3'000 + 4\sqrt{a} - 20\,p) = -40\,p + 3'040 + 4\sqrt{a}. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\begin{cases} f_a(a_0,p_0) = 0 \\ f_y(a_0,p_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{2}{\sqrt{a_0}}\,(p_0-2) - 1 = 0 \\ -40\,p_0 + 3'040 + 4\sqrt{a_0} = 0 \end{cases}.$$

Aus $\frac{2}{\sqrt{a_0}}\,(p_0-2) - 1 = 0$ erhalten wir

$$\sqrt{a_0} = 2\,(p_0 - 2).$$

Dieses Resultat setzen wir in $-40\,p_0 + 3'040 + 4\sqrt{a_0} = 0$ ein und finden:

$$\begin{aligned} -40\,p_0 + 3'040 + 4\sqrt{a_0} = 0 \quad &\overset{\sqrt{a_0}=2\,(p_0-2)}{\Leftrightarrow} \quad -40\,p_0 + 3'040 + 8\,(p_0-2) = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad 32\,p_0 + 3'024 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad p_0 = 94.5. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$\sqrt{a_0} = 2\,(p_0 - 2) = 2 \cdot (94.5 - 2) = 185 \Leftrightarrow a_0 = 34'225.$$

Als nächstes verifizieren wir die hinreichenden Bedingungen: falls (a_0, p_0) die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt folgendes:

$$\left\{\begin{array}{c} f_{aa}(a_0,p_0) > 0 \\ f_{pp}(a_0,p_0) > 0 \\ f_{aa}(a_0,p_0)\, f_{pp}(a_0,p_0) - (f_{ap}(a_0,p_0))^2 > 0 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow (a_0,p_0) \text{ ist ein Minimum,}$$

$$\left\{\begin{array}{c} f_{aa}(a_0,p_0) < 0 \\ f_{pp}(a_0,p_0) < 0 \\ f_{aa}(a_0,p_0)\, f_{pp}(a_0,p_0) - (f_{ap}(a_0,p_0))^2 > 0 \end{array}\right. \qquad \Rightarrow (a_0,p_0) \text{ ist ein Maximum,}$$

und

$$f_{aa}(a_0,p_0)\, f_{pp}(a_0,p_0) - (f_{ap}(a_0,p_0))^2 < 0 \Rightarrow (a_0,p_0) \text{ ist ein Sattelpunkt.}$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die zweiten partiellen Ableitungen von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{aa}(a,p) &= 2\left(-\frac{1}{2}\right) a^{-\frac{3}{2}}\,(p-2) = -a^{-\frac{3}{2}}\,(p-2), \\ f_{pp}(a,p) &= -40, \\ f_{ap}(a,p) &= \frac{2}{\sqrt{a}} = 2\,a^{-\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Daraus folgt $f_{aa}(a,p) < 0$, falls $a > 0$ und $p > 2$, und $f_{pp}(a,p) < 0$ für alle a und p. Überdies ist

$$f_{aa}(a_0,p_0)\, f_{pp}(a_0,p_0) - (f_{ap}(a_0,p_0))^2 > 0.$$

für $(a_0, p_0) = (34'225, 94.5)$.
Deshalb ist $(a_0, p_0) = (34'225, 94.5)$ ein Maximum von f.

(d) (7 Punkte)

In dieser Aufgabe finden wir die Schlüsselwörter “Extremum annehmen (maximal oder minimal)”, welche auf die zu verwendenden mathematischen Hilfsmittel hinweisen. Die Aufgabenstellung entspricht einem Optimierungsproblem, mit oder ohne Nebenbedingung. Nebenbedingungen sind Bedingungen, welche die Lösungsmenge zusätzlich einschränken. In dieser Aufgabe können x und y *nicht* frei gewählt werden, weil die Distanz zwischen dem Punkt (x, y) und dem Punkt $(a, 0)$ stets 4 betragen muss, d.h., der Punkt (x, y) muss auf einem Kreis mit Zentrum $(a, 0)$ und Radius 4 liegen (ein Bild hilft beim Veranschaulichen der Situation). Deshalb liegt ein Optimierungsproblem mit Nebenbedingung vor. Die nächste Frage ist, welche Funktion maximiert/minimiert werden soll. Im Text wird beschrieben, dass die Fläche von R maximiert werden soll, und diese entspricht der Funktion:

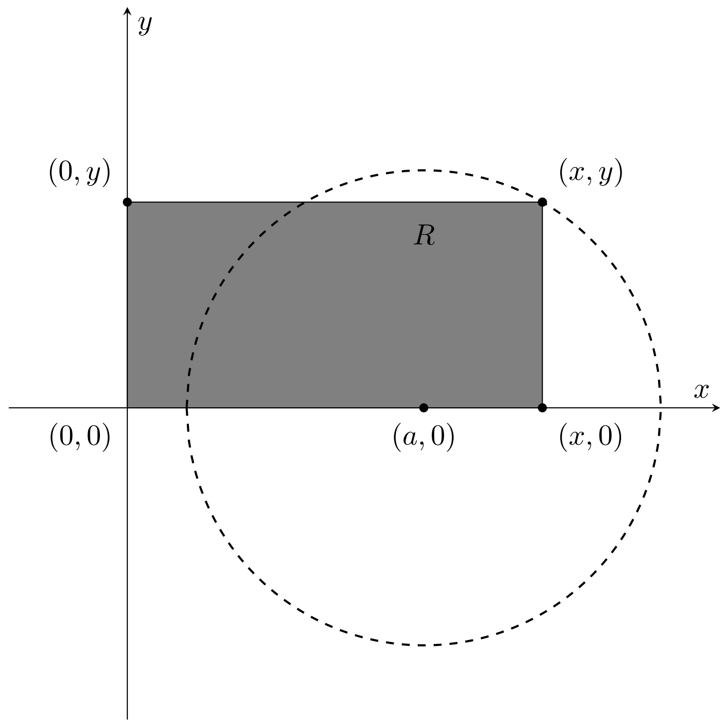
$$f(x,y) = x\,y.$$

Die Nebenbedingung kann wie folgt formuliert werden:

$$\sqrt{(x-a)^2 + y^2} = 4 \Leftrightarrow (x-a)^2 + y^2 = 4^2 \Leftrightarrow \varphi(x,y) = (x-a)^2 + y^2 - 16 = 0.$$

Insgesamt kann das Optimierungsproblem folgendermassen formuliert werden:

$$\max f(x,y) = x\,y \text{ so, dass } \varphi(x,y) = (x-a)^2 + y^2 - 16 = 0.$$



Wir verwenden das Lagrange Verfahren, um das Problem zu lösen. Dafür definieren wir als erstes die Lagrange Funktion:

$$\begin{aligned} F(x, y, \lambda) &= f(x, y) + \lambda\, \varphi(x, y) \\ &= x\, y + \lambda\, ((x-a)^2 + y^2 - 16). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange Bedingungen:

$$F_x(x, y, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad y + 2\,\lambda\,(x-a) = 0, \tag{I}$$

$$F_y(x, y, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad x + 2\,\lambda\, y = 0, \tag{II}$$

$$F_\lambda(x, y, \lambda) = 0 \quad \Rightarrow \quad (x-a)^2 + y^2 - 16 = 0. \tag{III}$$

Aus (I) folgt

$$2\,\lambda = -\frac{y}{x-a}. \tag{IV}$$

Von (II) erhalten wir

$$2\,\lambda = -\frac{x}{y}. \tag{V}$$

Gleichungen (IV) und (V) implizieren:

$$-\frac{y}{x-a} = 2\,\lambda = -\frac{x}{y} \Leftrightarrow y^2 = x\,(x-a).$$

Dieses Resultat fügen wir in Gleichung (III) ein und folgern daraus:

$$(x-a)^2 + x\,(x-a) - 16 = 0 \Leftrightarrow 2\,x^2 - 3\,a\,x + a^2 - 16 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3\,a \pm \sqrt{9\,a^2 - 8\,(a^2-16)}}{4} = \frac{3\,a \pm \sqrt{a^2+128}}{4}.$$

Weil $x = \frac{3\,a - \sqrt{a^2+128}}{4} \in \left(0, \frac{a}{2}\right)$ für $a \in (4, 8)$, folgt $x\,(x-a) < 0$, was wiederum im Widerspruch zu

$y^2 = x\,(x-a)$ steht. Deshalb muss $x = \frac{3\,a-\sqrt{a^2+128}}{4}$ ausgeschlossen werden, womit als einzige Lösung übrig bleibt:

$$x = \frac{3\,a+\sqrt{a^2+128}}{4}.$$

Damit folgt:

$$y = \sqrt{x\,(x-a)} = \sqrt{\frac{3\,a+\sqrt{a^2+128}}{4}\left(\frac{3\,a+\sqrt{a^2+128}}{4}-a\right)} = \sqrt{\frac{64+a\,\sqrt{a^2+128}-a^2}{8}}.$$

Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 2

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☐	☐	☒
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☒	☐	☐	☐
Frage 5	☐	☐	☐	☒
Frage 6	☐	☐	☐	☒
Frage 7	☐	☒	☐	☐
Frage 8	☐	☒	☐	☐
Frage 9	☐	☐	☒	☐
Frage 10	☒	☐	☐	☐
Frage 11	☐	☒	☐	☐
Frage 12	☐	☐	☒	☐

F1. (d). Die Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$ entspricht einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0,3)$ und Halbachsen $a = 6$ und $b = 4$. Folglich ist $P = (6,3)$ der Punkt auf der Ellipse mit der grössten x-Koordinate und damit ein Maximum von $f(x,y) = x$ unter der Bedingung $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{36} + \frac{(y-3)^2}{16} = 1$.

F2. (d). Zunächst ist $(-x_0,-y_0)$ ist ein stationärer Punkt von g, da (x_0,y_0) ein stationärer Punkt von f ist. Tatsächlich gilt, dass

$$g_x(-x_0,-y_0) = f_x(x_0,y_0) = 0$$

und

$$g_y(-x_0,-y_0) = f_y(x_0,y_0) = 0.$$

Ausserdem ist $(-x_0,-y_0)$ ein lokales Minimum von g, da (x_0,y_0) ein lokales Maximum von f ist. Die folgt aus

$$g_{xx}(-x_0,-y_0) = -f_{xx}(x_0,y_0) > 0,$$
$$g_{yy}(-x_0,-y_0) = -f_{yy}(x_0,y_0) > 0,$$

und

$$g_{xx}(-x_0,-y_0)\, g_{yy}(-x_0,-y_0) - (g_{xy}(-x_0,-y_0))^2 = f_{xx}(x_0,y_0)\, f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2 > 0.$$

F3. (b). Da $(x_0,y_0) = (1,2)$ ein lokales Maximum von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ ist, entspricht die Steigung der Tangente an die Niveaulinie von f im Punkt $(x_0,y_0) = (1,2)$ der Steigung der Tangente an die Niveaulinie $\varphi(x,y) = 0$. Mit Hilfe des Satzes von der impliziten Funktion erhalten wir:

$$\frac{dy}{dx}(1,2) = -\frac{\varphi_x(1,2)}{\varphi_y(1,2)} = -\frac{2}{3}.$$

F4. (a). Die Integralfunktion I ist eine Stammfunktion von f, d.h., $I'(x) = f(x)$.

F5. (d). Die einzige richtige Antwort ist (d), welche der Formel der Integration durch Substitution entspricht. Beachte, dass $F'(x) = f(x)$, da F eine Stammfunktion von f ist. Durch Differenzieren der Ausdrücke links und rechts des Gleichheitszeichens erhalten wir jeweils:

(a) $f(g(x)) = f(x)$. Dies ist im Allgemeinen falsch.

(b) $f(g(x)) = f(g(x))\, g'(x)$. Dies ist im Allgemeinen falsch.

(c) $f(g(x))\, f'(x) = f(g(x))\, g'(x)$. Dies ist im Allgemeinen falsch.

(d) $f(g(x))\, g'(x) = f(g(x))\, g'(x)$. Dies ist offensichtlich richtig.

F6. (d). Es gilt:

(a) $(x^2 + x\, e^{x^2} + C)' = 2\,x + (1 + 2\,x^2)\, e^{x^2}$;

(b) $(3\,x + 2\,x\, e^{x^2} + C)' = 3 + (2 + 4\,x^2)\, e^{x^2}$;

(c) $(3\,x^2 + 2\,x\, e^{x^2} + C)' = 6\,x + (2 + 4\,x^2)\, e^{x^2}$;

(d) $(3\,x^2 + x\, e^{x^2} + C)' = 6\,x + (1 + 2\,x^2)\, e^{x^2}$.

Demnach ist die Funktion in (d) als einzige Stammfunktion des Integranden des gegebenen Integrals. Es folgt:

$$\int \left[6\,x + (1 + 2\,x^2)\, e^{x^2}\right]\, dx = 3\,x^2 + x\, e^{x^2} + C.$$

F7. (b). Eine Dichtefunktion ist eine nicht-negative Funktion mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Offensichtlich ist $f(x) \geq 0$ für alle x, wenn $a > 0$. Ausserdem gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^1 f(x)\, dx = \int_0^1 \left(a\, x^2 + \frac{1}{2}\right)\, dx = \frac{a}{3} + \frac{1}{2}.$$

Es folgt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow \frac{a}{3} + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{3}{2}.$$

F8. (b). Eine Dichtefunktion ist eine nicht-negative Funktion mit $\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1$. Es gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = \int_0^8 f(x)\, dx = \int_0^8 \left(a\, x + \frac{1}{16}\right)\, dx = 32\, a + \frac{1}{2}.$$

Wir berechnen:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, dx = 1 \Leftrightarrow 32\, a + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{64}.$$

Offensichtlich gilt für $a = \frac{1}{64}$, dass $f(x) \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und folglich ist f eine Dichtefunktion. Wir erhalten:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X] &= \int_{-\infty}^{\infty} x\, f(x)\, dx \\
&= \int_0^8 x \left(\frac{x}{64} + \frac{1}{16}\right)\, dx \\
&= \int_0^8 \left(\frac{x^2}{64} + \frac{x}{16}\right)\, dx \\
&= \left[\frac{x^3}{192} + \frac{x^2}{32}\right]_0^8 \\
&= \frac{512}{192} + \frac{64}{32} \\
&= \frac{896}{192} \\
&= \frac{14}{3}.
\end{aligned}$$

F9. (c). Es gilt:

$$\mathbf{a}\cdot(\mathbf{a}+\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{a} + \underbrace{\mathbf{a}\cdot\mathbf{b}}_{=0 \text{ da orthogonal}} = ||\mathbf{a}||^2 = 9.$$

F10. (a). Eine Basis eines Vektorraums ist ein System von linear unabhängigen Vektoren, welches den gesamten Vektorraum aufspannt. Demnach können wir Antwort (d) ausschliessen, da im Vektorraum $\mathbb{R}^3$ die maximale Anzahl an linear unabhängigen Vektoren in einem System drei ist. Wir überprüfen nun Antwort (a), (b), und (c). Wir verwenden das folgende Resultat: drei Vektoren in $\mathbb{R}^3$ definieren eine Basis von $\mathbb{R}^3$ genau dann, wenn sie linear unabhängig sind, d.h., die 3×3 Matrix, deren Spalten durch die drei Vektoren gegeben sind, ist regulär, oder äquivalent, ihre Determinante ist von Null verschieden. Es gilt:

$$\text{(a)}\quad \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix}\right| = -2 \neq 0.$$

$$\text{(b)}\quad \left|\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 4 \\ -1 & 3 & 8 \end{pmatrix}\right| = 0.$$

$$\text{(c)}\quad \left|\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}\right| = 0.$$

F11. (b). Die Existenz von unendlich vielen Lösungen impliziert, dass $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A,\mathbf{b}) < n = 5$. In diesem Fall ist die Dimension des Lösungsraums gleich $3 = 5 - \mathrm{rg}(A)$. Folglich gilt, dass $\mathrm{rg}(A) = 2$.

F12. (c). Es gilt:

$$\begin{aligned}
B^T\,(A\,B)^T\,(B^{-1}\,A^{-1})^T\,B\,(A\,B)^{-1} &= B^T\,B^T\,A^T\,(A^{-1})^T\,(B^{-1})^T\,\underbrace{B\,B^{-1}}_{=I}\,A^{-1} \\
&= B^T\,B^T\,\underbrace{A^T\,(A^T)^{-1}}_{=I}\,(B^T)^{-1}\,A^{-1} \\
&= B^T\,\underbrace{B^T\,(B^T)^{-1}}_{=I}\,A^{-1} \\
&= B^T\,A^{-1} \\
&\overset{A \text{ symmetrisch}}{=} B^T\,(A^{-1})^T \\
&= (A^{-1}\,B)^T.
\end{aligned}$$

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☒	☐	☐
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☐	☒	☐	☐
Frage 4	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☐	☒	☐	☐
Frage 6	☐	☐	☒	☐
Frage 7	☐	☐	☐	☒
Frage 8	☐	☐	☒	☐

F1. (b). Da f die Dichtefunktion der Zufallsvariablen X auf $[0,1]$ ist, gilt:

$$\int_0^1 f(x)\,dx = 1$$

und

$$\int_0^1 x\,f(x)\,dx = \mathbb{E}\big[X\big].$$

Es folgt, dass

$$\int_0^1 (x+1)\,f(x) = \underbrace{\int_0^1 x\,f(x)\,dx}_{=\mathbb{E}\left[X\right]} + \underbrace{\int_0^1 f(x)\,dx}_{=1} = \frac{28}{45} + 1 = \frac{73}{45}.$$

F2. (c). $\mathbf{u}$ ist orthogonal zu $\mathbf{v}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned}
&\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad t\,(t+5) + (t-1)\,(-1) + (-6)\cdot 1 = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad t^2 + 4\,t - 5 = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad (t+5)\,(t-1) = 0\\
&\quad\Leftrightarrow\quad t \in \{-5, 1\}.
\end{aligned}$$

Für $t = -5$ haben wir

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} -5 \\ -6 \\ -6 \end{pmatrix}$$

und

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{25+36+36} = \sqrt{97}.$$

Für $t = 1$ haben wir

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -6 \end{pmatrix}$$

and

$$||\mathbf{u}|| = \sqrt{1+0+36} = \sqrt{37}.$$

F3. (b). Wir verwenden die Gauß Methode:

$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 9 & 5 & 2 & 2 \\ 7 & 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -9\,(I) \\ -7\,(I) \end{matrix} \\
&\to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -13 & -7 & 11 \\ 0 & -13 & -7 & 11 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ -(II) \end{matrix} \\
A^\star &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & -13 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} .
\end{aligned}$$

Es folgt, dass $\mathrm{rg}(A^\star) = 2$ und deshalb $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 2$.

F4. (b). Um die Inverse von A zu bestimmen verwenden wir Gauß:

$$\begin{aligned}
(A, I) &= \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ -(I) \end{matrix} \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ :(-1) \\ \end{matrix} \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{matrix} \\ \\ :(-1) \end{matrix} \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) \begin{matrix} -(III) \\ \\ \\ \end{matrix} \\
&\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}\right) = (I, A^{-1}).
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

F5. (b). Falls λ ein Eigenwert von A mit dem Eigenvektor $\mathbf{x}$ ist, dann ist λ^2 ein Eigenwert von A^2 zum selben Eigenvektor $\mathbf{x}$. Dies folgt aus

$$A^2\,\mathbf{x} = A\,(A\,\mathbf{x}) = A(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda\,A\,\mathbf{x} = \lambda\,(\lambda\,\mathbf{x}) = \lambda^2\,\mathbf{x}.$$

Wir berechnen die Eigenwerte von A. Es gilt:

$$\det(A - \lambda\, I) = (1-\lambda)^3 - (1-\lambda) = (1-\lambda)\,((1-\lambda)^2 - 1) = \lambda\,(1-\lambda)(\lambda - 2).$$

Daher gilt

$$\det(A - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{0, 1, 2\},$$

d.h., $0, 1, 2$ sind die Eigenwerte von A. Es folgt, dass 0,1,4 die Eigenwerte von A^2 sind.

F6. (c). Antworten (a), (b), und (d) erfüllen nicht die Bedingung $y_0 = 2$. Für Antwort (c) gilt:

$$y_{k+1} - (1+a)\, y_k = 4\,(1+a)^{k+1} - 2 - (1+a)\,(4\,(1+a)^k - 2) = 4\,(1+a)^{k+1} - 2 - 4\,(1+a)^{k+1} + 2 + 2\,a = 2\,a$$

für $a \neq 1$ und $a \neq 0$. Deshalb erfüllt (c) die Differenzengleichung.

F7. (d). Die Normalform der Differenzengleichung ist

$$y_{k+1} = 2\, y_k + 7.$$

Es folgt, dass $A = 2$ und $B = 7$. Weil $A > 0$ und $|A| > 1$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung monoton und divergent.

F8. (c). Die Normalform der Differenzengleichung ist

$$y_{k+1} = \frac{1}{a+2}\, y_k - \frac{a^2 - 4}{a+2},$$

d.h., $A = \frac{1}{a+2}$ und $B = -\frac{a^2-4}{a+2} = 2 - a$. Da $A \neq 1$, ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung monoton und konvergent genau dann, wenn $0 < A < 1$. Es gilt:

$$0 < A < 1 \Leftrightarrow (a+2) > 0 \text{ und } a + 2 > 1 \Leftrightarrow a > -1.$$

Es folgt, dass die allgemeine Lösung der Differenzengleichung genau dann monoton und konvergent ist, wenn $a > -1$. Weiterhin konvergiert die Lösung gegen null genau dann, wenn

$$\lim_{k\to\infty} y_k = y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{2-a}{1 - \frac{1}{a+2}} = -\frac{a^2-4}{a+1} = 0 \overset{a>-1}{\Longleftrightarrow} a = 2.$$