Mathematik A
Nachholprüfung Herbstsemester 2017

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

12. Juli 2018

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fürtsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhundenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a1) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \ln\left(\frac{1}{2 - e^{-3\sqrt{x+5}}}\right).$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f von f.

Aufgabe 1

(a2) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \,:\, D_f \to \mathbb{R},\; x \mapsto y = \ln\left(\frac{1}{2 - e^{-3\sqrt{x+5}}}\right).$$

Ist die Funktion f auf ihrem Definitionsgebiet streng monoton wachsend (Beweis)?

Aufgabe 1

(a3) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\ :\ D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = \ln\left(\frac{1}{2 - e^{-3\sqrt{x+5}}}\right).$$

Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Aufgabe 1

(b) (6 Punkte)

Sie benötigen einen Kredit in Höhe von $1'000'000$ CHF, um den Bau eines Hauses zu finanzieren. Dafür schliessen Sie ein Hypothekendarlehen ab, welches einen fixen jährlichen Zinssatz in Höhe von 1% für die ersten 10 Jahre garantiert. Um Ihre Schulden zu tilgen, vereinbaren Sie Zahlungen in Höhe von $25'000$ CHF, die in den 10 Jahren am Ende jeden Jahres fällig werden. Nach 10 Jahren muss das Darlehen neu verhandelt werden. In der Zwischenzeit sind die Zinsen gestiegen und Sie können sich schliesslich auf einen jährlichen Zinssatz von 2% einigen. Sie zahlen C^I CHF am Ende jeden Jahres für die *darauffolgenden* 15 Jahre, um Ihre Schulden auf $200'000$ CHF zu reduzieren.

Wie hoch müssen die jährlichen Zahlungen C^I sein, sodass Ihr Plan umsetzbar ist?

Aufgabe 1

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(c) (4 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{x \to 0} \frac{3^x - 2^x}{x^2 - x}.$$

Aufgabe 1

(d) (6 Punkte)

Derzeit entstehen 2.5 Exabytes (10^{18} Bytes) an neuen Daten pro Tag. Angenommen, die tägliche Datenproduktion steigt jeden Tag um 5%. Wie viele Jahre dauert es ausgehend von heute, bis eine Gesamtmenge von 45 Zetabytes (1 Zetabyte entspricht 1000 Exabytes) an Daten produziert wurde, angenommen, dass ein Jahr immer 365 Tage hat?

Aufgabe 1

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (5 Punkte)

Sei $a_k = \sin\left(\left(\frac{1}{4}\right)^k\right)$ für $k = 1, 2, \ldots$

Verwenden Sie das Taylorpolynom P_3 dritter Ordnung der Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R}, x \mapsto y = f(x) = \sin(x)$$

im Punkt $x_0 = 0$, um einen Näherungswert für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ zu bestimmen.

Aufgabe 2

(a1) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(a2) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f \,:\, D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = \sin(x).$$

R_3 bezeichne das Restglied dritter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_3\left(\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \leq \frac{1}{6120}.$$

Aufgabe 2

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{16 - 16\,x^2 - y^2}}{(x+y)^2\,\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f von f und stellen Sie diesen graphisch dar.

Aufgabe 2

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(c) (5 Punkte)

Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$P(K, A) = \left(2\,K^{\alpha} + 4\,A^{\beta}\right)^2, \quad K > 0,\ A > 0, \quad \alpha > 0,\ \beta > 0.$$

Für welche Werte der Parameter α und β ist die Substitutionsrate im Punkt $(K_0, A_0) = (2, 1)$ auf der Niveaulinie $P(K, A) = 144$ gleich $\frac{dA}{dK} = -1$.

Aufgabe 2

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(d) (6 Punkte)

Die Funktionen f und g sind auf $\mathbb{R}^2_{++}$ definiert und haben den Wertebereich $\mathbb{R}_{++}$. Ausserdem ist die Funktion f homogen vom Grad $r+2$ und die Funktion g homogen vom Grad $3-r$, für $r \in (-2, 3)$. Für die Funktion h gilt:

$$h(x,y) = f(x,y)\, g(x,y),$$

$$h_y(x,y) = -\frac{x^6}{y^2} + 3\,x^2\,y^2,$$

und

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) = \frac{6\,x^6 + 2\,x^2\,y^4}{x^6 + x^2\,y^4}.$$

Ermitteln Sie $h(x,y)$ und vereinfachen Sie den Funktionsterm.

Aufgabe 2

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden, welcher zusammen mit den Prüfungsaufgaben ausgehändigt wird. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen ist eine Tautologie?

(a) $(A \vee B) \Rightarrow B$.

(b) $(A \vee B) \Rightarrow A$.

(c) $(A \wedge B) \Leftrightarrow A$.

(d) $(A \wedge B) \Rightarrow A$.

Aufgabe 3

Frage 2 (3 Punkte)

Sei f eine differenzierbare Funktion. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone und konvergente Folge mit $a_n \in D_f$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

(a) konvergent.

(b) divergent.

(c) monoton.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Aufgabe 3

Frage 3 (2 Punkte)

Eine Funktion $f : [0, 10] \to \mathbb{R}$ ist monoton wachsend auf $[0, 10]$ genau dann, wenn

(a) $f(10) \geq f(0)$.

(b) $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in [0, 10]$ mit $x_1 < x_2$.

(c) $f(x_1) \geq f(x_2)$ für alle $x_1, x_2 \in [0, 10]$ mit $x_1 > x_2$.

(d) die erste Ableitung $f'(x)$ für alle $x \in (0, 10)$ existiert und positiv ist.

Aufgabe 3

Frage 4 (3 Punkte)

Ein Investor hat die Wahl zwischen zwei Projekten:

Projekt I erfordert eine Anfangsinvestition von $100'000$ CHF und zahlt $40'000$ CHF in 6 Monaten sowie $80'000$ CHF in 1 Jahr aus.

Projekt II erfordert eine Anfangsinvestition von $110'000$ CHF und zahlt in 1 Jahr $130'000$ CHF aus.

(a) Projekt I ist Projekt II vorzuziehen, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(b) Projekt II ist Projekt I vorzuziehen, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(c) Projekt I und Projekt II haben denselben Nettobarwert, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(d) Ob Projekt I dem Projekt II vorzuziehen ist, oder Projekt II dem Projekt I, hängt von der Höhe des strikt positiven Zinssatzes ab.

Aufgabe 3

Frage 5 (3 Punkte)

Ein Finanzberater schlägt seinem Kunden zwei Optionen für die Rückzahlung eines Hypothekenkredites vor: Option 1 sieht die Rückzahlung des Kredites mit konstanten Zahlungen C^D vor, welche über n^D Jahre am Jahresanfang erfolgen. Bei Option 2 dagegen wird derselbe Kredit mit konstanten Zahlungen C^I am Jahresende über n^I Jahre zurückgezahlt.

Unter der Voraussetzung, dass der Zinssatz strikt positiv ist, folgt:

(a) $C^I = C^D$, wenn $n^I = n^D + 1$.

(b) $C^I = C^D$, wenn $n^I = n^D - 1$.

(c) $C^I = C^D$, wenn $n^I = n^D$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Aufgabe 3

Frage 6 (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \begin{cases} \frac{(\sin(x))^2}{a\,x^2} & \text{für } x \neq 0 \\ a & \text{für } x = 0 \end{cases}.$$

Für welche Werte von $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ ist f überall stetig?

(a) Für $a \in \{-1, 1\}$.

(b) Für $a = 1$.

(c) Für $a = -1$.

(d) Für alle $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$.

Aufgabe 3

Frage 7 (3 Punkte)

Sei $f(x) = 1 + 3\,x - 4\,x^4 + 2\,x^5$ und P_4 das Taylorpolynom vierter Ordnung von f in $x_0 = 0$. Welche der folgenden Aussagen über das Restglied vierter Ordnung R_4 in $x_0 = 0$ ist wahr?

(a) $R_4(x) > 0$ für alle $x > 0$.

(b) $R_4(x) < 0$ für alle $x > 0$.

(c) $R_4(x) > 0$ für alle $x \leq 0$.

(d) $R_4(x) < 0$ für alle $x \leq 0$.

Aufgabe 3

Frage 8 (3 Punkte)

Die Elastizität $\varepsilon_f(x)$ der Funktion f sei gegeben durch:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\ln(x) + e^{3\,x}.$$

Für die Wachstumsrate $\rho_f(x)$ von f folgt:

(a) $\rho_f(x) = x^2\,\ln(x) + x\,e^{3\,x}$.

(b) $\rho_f(x) = \ln(x) + e^{3\,x^2}$.

(c) $\rho_f(x) = \ln(x) + \frac{e^{3\,x}}{x}$.

(d) $\rho_f(x) = x\,\ln(x) + \frac{e^{3\,x}}{x}$.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2\, e^{-x}.$$

(a) f ist elastisch für $x > 0$.

(b) f ist elastisch für $x < 2$ und unelastisch für $x > 2$.

(c) f ist unelastisch für $x > 1$ und elastisch für $x < 1$.

(d) f ist unelastisch für $x > 0$.

Aufgabe 4

Frage 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{++}, \quad x \mapsto f(x) = \sqrt{x^2\, e^{x^2} + 1}.$$

(a) f hat ein lokales Maximum in $x_0 = 0$.

(b) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = 0$.

(c) f hat einen Wendepunkt in $x_0 = 0$.

(d) f hat keine stationären Punkte.

Aufgabe 4

Frage 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}\setminus\{-1\}\to\mathbb{R},\,x\mapsto f(x)=\frac{-1}{1+x}.$$

P_4 und P_5 seien die Taylorpolynome vierter und fünfter Ordnung von f in $x_0=0$.

Dann gilt:

(a) $P_4(x) > P_5(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(b) $P_4(x) < P_5(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(c) $P_4(x) = P_5(x)$ für alle $x \in D_f$.

(d) Jeder der Fälle $P_4(x) > P_5(x)$, $P_4(x) < P_5(x)$ oder $P_4(x) = P_5(x)$ ist für entsprechende $x \in D_f$ möglich.

Aufgabe 4

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2-25}$$

und

$$g(x,y) = \ln\left(8\,x - 4\,x^2 - y^2\right),$$

mit den entsprechenden Definitionsgebieten D_f und D_g.

Dann gilt:

(a) $D_f \subseteq D_g$.

(b) $D_g \subseteq D_f$.

(c) $D_f = D_g$.

(d) $D_f \cap D_g = \emptyset$.

Aufgabe 4

Frage 5 (3 Punkte)

Sei $f(x) = 1 - x + 3\,x^2 - 4\,x^3 + 5\,x^4 + 3\,x^5$ und $g(x) = 1 + 4\,x^2 - 6\,x^3 + 4\,x^4 - 2\,x^5$ und seien $P_{f,4}$ und $P_{g,4}$ ihre jeweiligen Taylorpolynome vierter Ordnung in $x_0 = 0$.

Welche der folgenden Aussagen bezüglich der Restglieder vierter Ordnung $R_{f,4}$ und $R_{g,4}$ von f beziehungsweise g in $x_0 = 0$ ist wahr?

(a) $R_{f,4}(x) < R_{g,4}(x)$ für alle $x > 0$.

(b) $R_{f,4}(x) > R_{g,4}(x)$ für alle $x > 0$.

(c) $R_{f,4}(x) = R_{g,4}(x)$ für alle $x > 0$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist richtig.

Aufgabe 4

Frage 6 (2 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 8\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{5\,y^3}\right)^{-\frac{1}{6}} + \sqrt[3]{3\,x} + \sqrt[6]{y^2} \quad (x > 0,\, y > 0).$$

(a) f ist linear homogen.

(b) f ist homogen vom Grad -0.5.

(c) f ist homogen vom Grad 0.5.

(d) f ist nicht homogen.

Aufgabe 4

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^3}{y} + 1 + \sqrt{x^4 + 2\,y^4} \quad (x > 0,\, y > 0)$$

und

$$g(x,y) = f(a\,x, a^2\,y),$$

wobei $a > 0$.

(a) g ist linear homogen.

(b) g ist homogen vom Grad a.

(c) g ist homogen vom Grad $2\,a$.

(d) g ist nicht homogen.

Aufgabe 4

Frage 8 (3 Punkte)

Für welche Werte des Parameters $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x, y) = x^{a-1}\, y^{a+6} + \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x > 0,\, y > 0)$$

homogen?

(a) f ist homogen für $a = 0$.

(b) f ist homogen für $a = 1$.

(c) f ist homogen für $a = -2$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ homogen.

Prüfungen Assessment-Stufe: Herbstsemester 2017

1,200 Mathematik A

Antwortbogen Multiple-Choice-Fragen, Seite 1 von 2

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Prüfungen Assessment-Stufe: Herbstsemester 2017

1,200 Mathematik A

Antwortbogen Multiple-Choice-Fragen, Seite 2 von 2

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐