Mathematatik A

Musterlösung Nachholprüfung Herbstsemester 2017

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

12. Juli 2018

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a1) (**4 Punkte**).
Damit die Funktion f definiert ist, müssen die folgenden drei Bedingungen erfüllt sein:

(i) $x+5 \geq 0$ wegen der $\sqrt{\cdot}$ Funktion;

(ii) $2-e^{-3\sqrt{x+5}} \neq 0$ um Division durch Null zu vermeiden;

(iii) $\frac{1}{2-e^{-3\sqrt{x+5}}} > 0$ wegen der $\ln(\cdot)$ Funktion.

Die Bedingung (ii) folgt aus Bedingung (iii). Ausserdem gilt Bedingung (iii) schon, wenn Bedingung (i) erfüllt ist, da $2-e^{-3\sqrt{x+5}} \geq 1$ für $x+5 \geq 0$. Demnach reicht es, Bedingung (i) zu lösen, d.h. $x \geq -5$. Es folgt:

$$D_f = [-5, \infty).$$

Für den Wertebereich R_f von f erhalten wir:

$$\begin{aligned}
x \in D_f \quad &\Leftrightarrow \quad x \geq -5 \\
&\Leftrightarrow \quad 1 \leq 2-e^{-3\sqrt{x+5}} < 2 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} < \frac{1}{2-e^{-3\sqrt{x+5}}} \leq 1 \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{1}{2}\right) < \ln\left(\frac{1}{2-e^{-3\sqrt{x+5}}}\right) \leq 0.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$R_f = \left(\ln\left(\frac{1}{2}\right), 0\right] = \left(-\ln(2), 0\right].$$

(a2) (**3 Punkte**).
Wir verwenden das folgende Resultat: Ist f differenzierbar mit $f'(x) > 0$ (< 0) für alle $x \in (a,b)$, dann ist f streng monoton wachsend (fallend) auf $[a,b]$.

Hier gilt:

$$f(x) = \ln\left(\frac{1}{2-e^{-3\sqrt{x+5}}}\right) = -\ln\left(2-e^{-3\sqrt{x+5}}\right).$$

Folglich ist

$$f'(x) = \frac{-1}{2-e^{-3\sqrt{x-5}}}\left(-e^{-3\sqrt{x+5}}\right)\left(\frac{-3}{2\sqrt{x+5}}\right).$$

Da alle drei Faktoren im Definitionsbereich von f strikt negativ sind, ist $f'(x) < 0$ für alle $x \in (-5, \infty)$ und demnach die Funktion f auf ihrem Definitionsbereich $D_f = [-5, \infty)$ streng monoton fallend.

(a3) (**3 Punkte**).
Für $y \in R_f = (-\ln(2), 0]$ gilt:

$$
\begin{aligned}
y = -\ln\left(2 - e^{-3\sqrt{x+5}}\right) \quad &\Leftrightarrow \quad e^{-y} = 2 - e^{-3\sqrt{x+5}} \\
&\Leftrightarrow \quad 2 - e^{-y} = e^{-3\sqrt{x+5}} \\
&\Leftrightarrow \quad \ln\left(2 - e^{-y}\right) = -3\sqrt{x+5} \\
&\Leftrightarrow \quad -\frac{1}{3}\ln\left(2 - e^{-y}\right) = \sqrt{x+5} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{9}\left(\ln\left(2 - e^{-y}\right)\right)^2 = x+5 \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{1}{9}\left(\ln\left(2 - e^{-y}\right)\right)^2 - 5 = x.
\end{aligned}
$$

Mit $D_{f^{-1}} = R_f = (-\ln(2), 0]$ und $R_{f^{-1}} = D_f = [-5, \infty)$ folgt:

$$f^{-1} : (-\ln(2), 0] \to [-5, \infty), \quad x \mapsto y = f^{-1}(x) = \frac{1}{9}\left(\ln\left(2 - e^{-x}\right)\right)^2 - 5.$$

(b) (**6 Punkte**).
Die geliehene Summe von $P = 1'000'000$ CHF hat in 25 Jahren einen Endwert von:

$$A = P\,(1+i_1)^{10}\,(1+i_2)^{15}$$

mit $i_1 = 1\%$ und $i_2 = 2\%$. Die konstanten Zahlungen $C_1^I = 25'000$ CHF am Ende jeden Jahres für 10 Jahre stellen eine nachschüssige 10-jährige Rente dar. Ihr Endwert nach 10 Jahren beträgt

$$A_{1,10} = C_1^I\,\frac{(1+i_1)^{10} - 1}{i_1}.$$

Der Betrag $A_{1,10}$ entspricht nach weiteren 15 Jahren Verzinsung bei einem Zinssatz von i_2:

$$A_{1,10}\,(1+i_2)^{15} = C_1^I\,\frac{(1+i_1)^{10} - 1}{i_1}\,(1+i_2)^{15}.$$

Nicht zuletzt stellen die konstanten Zahlungen von C_2^I am Ende jeden Jahres für die *nächsten* 15 Jahre eine nachschüssige 15-jährige Rente dar, deren Endwert nach Ende der 25-jährigen Laufzeit

$$A_{2,15} = C_2^I\,\frac{(1+i_2)^{15} - 1}{i_2}$$

beträgt. Da der Wert der Schulden 25 Jahre nach Aufnahme des Kredites $200'000$ CHF betragen soll, müssen die folgenden Bedingungen für die Unbekannte C_2^I gelten:

$$
\begin{aligned}
200'000 = \; & \underbrace{P\,(1+i_1)^{10}\,(1+i_2)^{15}}_{\text{Wert des ursprünglichen Kredits in 25 Jahren}} \; - \; \underbrace{C_1^I\,\frac{(1+i_1)^{10}-1}{i_1}\,(1+i_2)^{15}}_{\text{Wert der Zahlungen über die ersten 10 Jahre in 25 Jahren}} \\
& - \; \underbrace{C_2^I \cdot \frac{(1+i_2)^{15}-1}{i_2}}_{\text{Wert der Zahlungen über die nächsten 15 Jahre in 25 Jahren}} \\
\Leftrightarrow \quad & C_2^I\,\frac{1}{(1+i_1)^{10}}\,\frac{1-(1+i_2)^{-15}}{i_2} = P - \frac{200'000}{(1+i_1)^{10}\,(1+i_2)^{15}} - C_1^I\,\frac{1-(1+i_1)^{-10}}{i_1} \\
\Leftrightarrow \quad & C_2^I = \left[P - \frac{200'000}{(1+i_1)^{10}\,(1+i_2)^{15}} - C_1^I\,\frac{1-(1+i_1)^{-10}}{i_1}\right]\frac{(1+i_1)^{10}\,i_2}{1-(1+i_2)^{-15}} \\
\Leftrightarrow \quad & C_2^I = \left[1'000'000 - \frac{200'000}{(1+1\%)^{10}\,(1+2\%)^{15}} - 25'000\,\frac{1-(1+1\%)^{-10}}{1\%}\right]\frac{(1+1\%)^{10}\cdot 2\%}{1-(1+2\%)^{-15}} \\
\Leftrightarrow \quad & C_2^I \approx 54'047.00 \quad (\text{CHF}).
\end{aligned}
$$

(c) (**4 Punkte**).
Es gilt:

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to 0}\frac{3^x-2^x}{x^2-x} \quad & \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \quad \lim_{x\to 0}\frac{3^x\,\ln(3)-2^x\,\ln(2)}{2\,x-1} \\
& = \quad -(\ln(3)-\ln(2)) \\
& = \quad \ln(2)-\ln(3) \\
& = \quad \ln\left(\frac{2}{3}\right).
\end{aligned}
$$

(d) (**6 Punkte**).
Sei a_n die Menge an Daten, die an Tag n produziert wird. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_0 &= 2.5 \cdot 10^{18}, \\ a_n &= a_{n-1}\,(1+5\%), \quad n = 1,2,3,\ldots \end{aligned}$$

d.h., $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine geometrische Folge mit $a_0 = 2.5 \cdot 10^{18}$ und $q = 1.05$.

Gefragt ist nach der Anzahl an Jahren, die benötigt werden, um eine Gesamtmenge von $45 \cdot 10^3 \cdot 10^{18}$ Bytes zu generieren. Zunächst berechnen wir die Länge des Zeitraums in Tagen. Sei N die Anzahl an benötigter Tagen, um eine Gesamtproduktion von $45 \cdot 10^3 \cdot 10^{18}$ Bytes zu erreichen. Die Bedingung an N lautet:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = 45 \cdot 10^3 \cdot 10^{18}.$$

Da $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine geometrische Folge ist, gilt:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = a_0 \frac{1-q^{N+1}}{1-q} = 2.5 \cdot 10^{18} \frac{1-1.05^{N+1}}{1-1.05}.$$

Demnach erhalten wir:

$$\sum_{n=0}^{N} a_n = 45 \cdot 10^3 \cdot 10^{18} \Leftrightarrow 10^{18} \frac{1-1.05^{N+1}}{1-1.05} = 45 \cdot 10^3 \cdot 10^{18} \Leftrightarrow 1 + 0.05 \cdot \frac{45 \cdot 10^3}{2.5} = 1.05^{N+1}.$$

Es folgt:

$$N = \frac{\ln\left(1 + 0.05 \cdot \frac{45 \cdot 10^3}{2.5}\right)}{\ln(1.05)} - 1 \approx 138.44 \quad (Tage).$$

Die entspricht ungefähr 0.38 Jahren.

Aufgabe 2

(a1) (**5 Punkte**).
Das Taylorpolynom dritter Ordnung von f in x_0 ist definiert als:

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3.$$

Mit $x_0 = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(0) = \sin(0) = 0 \\ f'(x) &= \cos(x) \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = \cos(0) = 1 \\ f''(x) &= -\sin(x) \Rightarrow f''(x_0) = f''(0) = -\sin(0) = 0 \\ f'''(x) &= -\cos(x) \Rightarrow f'''(x_0) = f'''(0) = -\cos(0) = -1. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P_3(x) = x - \frac{1}{6}\,x^3.$$

Damit erhalten wir:

$$a_k = \sin\left(1 + \left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \approx P_3\left(\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) = \left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{3k} = \left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{64}\right)^k.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k &\approx \sum_{k=1}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{1}{6}\left(\frac{1}{64}\right)^k\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k - \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{64}\right)^k \\ &= \frac{1}{4}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{4}} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{64}\,\frac{1}{1 - \frac{1}{64}} \\ &= \frac{1}{3} - \frac{1}{378} \\ &= \frac{125}{378} \\ &\approx 0.33. \end{aligned}$$

(a2) (**4 Punkte**).
Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,x^4$$

mit $\xi \in [0, x]$.

Es gilt:

$$f^{(4)}(x) = \sin(x).$$

Daraus folgt für $x \in \mathbb{R}$:

$$|R_3(x)| = \frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!}\,|x|^4 = \frac{1}{24}\underbrace{|\sin(\xi)|}_{\leq 1}\,|x|^4 \leq \frac{1}{24}\,|x|^4.$$

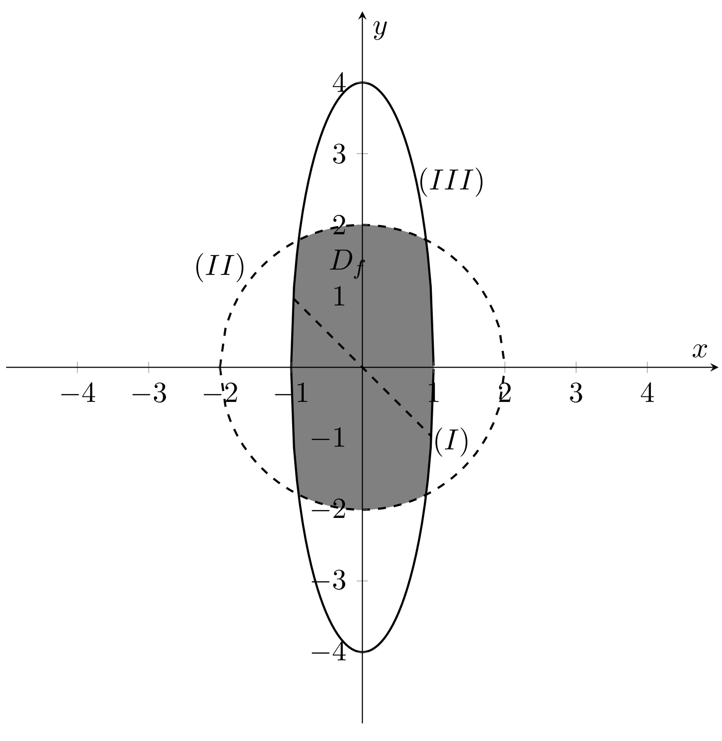
Demnach gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_3\left(\left(\frac{1}{4}\right)^k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{24}\left[\left(\frac{1}{4}\right)^k\right]^4 = \frac{1}{24}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{256}\right)^k = \frac{1}{24}\cdot\frac{1}{256}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{256}} = \frac{1}{6120}.$$

(b) (**4 Punkte**).
Es gilt:

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x + y \neq 0 \\ 4 - x^2 - y^2 > 0 \\ 16 - 16\,x^2 - y^2 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq -y \ (I) \\ x^2 + y^2 < 2^2 \ (II) \\ \frac{(x-0)^2}{1^2} + \frac{(y-0)^2}{4^2} \leq 1 \ (III) \end{cases}.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb einer Ellipse (III) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a = 1$ und $b = 4$, geschnitten mit der Fläche innerhalb eines Kreises (II) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $r = 2$. Weiterhin müssen die Punkte auf der Geraden $y = -x$ (I) ausgeschlossen werden. Die Gerade $y = -x$ schneidet die Ellipse für $x^2 + \frac{x^2}{16} = 1$, d.h., $x^2 = \frac{16}{17}$ oder $x = \pm\frac{4}{\sqrt{17}}$. Die folgende Abbildung zeigt den Definitionsbereich von f:



(c) (**5 Punkte**).
Die Parameter α, β müssen so gewählt werden, dass die folgenden zwei Bedingungen gelten:

(i) Der Punkt $(K_0, A_0) = (2,1)$ liegt auf der Isoquante $P(K,A) = 144$, d.h., $P(2,1) = 144$. Demnach gilt:
$$(2 \cdot 2^\alpha + 4)^2 = 144 \Leftrightarrow 2 \cdot 2^\alpha + 4 = 12 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

(ii) Die Substitutionsrate $\frac{dA}{dK}$ im Punkt $(K_0, A_0) = (2,1)$ entspricht -1. Es folgt:
$$-1 = \left.\frac{dA}{dK}\right|_{(K_0,A_0)=(2,1)} = -\frac{P_K(K_0,A_0)}{P_A(K_0,A_0)} = -\frac{2\,(2\,K_0^\alpha + 4\,A_0^\beta)\,\alpha\,2\,K_0^{\alpha-1}}{2\,(2\,K_0^\alpha + 4\,A_0^\beta)\,4\,\beta\,A_0^{\beta-1}} \overset{\alpha=2,(K_0,A_0)=(2,1)}{=} -\frac{2}{\beta}.$$
Wir erhalten:
$$\beta = 2.$$

(d) (**6 Punkte**).
Da f homogen vom Grad $r+2$ und g homogen vom Grad $3-r$ ist, folgt
$$h(\lambda\,x, \lambda\,y) = f(\lambda\,x, \lambda\,y)\,g(\lambda\,x, \lambda\,y) = \lambda^{r+2}\,f(x,y)\,\lambda^{3-r}\,g(x,y) = \lambda^5\,f(x,y)\,g(x,y) = \lambda^5\,h(x,y),$$
d.h., h ist homogen vom Grad 5. Demnach gilt mit der Eulerschen Relation:
$$x\,h_x(x,y) + y\,h_y(x,y) = 5\,h(x,y).$$
Mit
$$\varepsilon_{h,x}(x,y) = x\,\frac{h_x(x,y)}{h(x,y)}$$
erhalten wir
$$\varepsilon_{h,x}(x,y) + y\,\frac{h_y(x,y)}{h(x,y)} = 5,$$
d.h.,
$$h(x,y) = \frac{y\,h_y(x,y)}{5 - \varepsilon_{h,x}(x,y)}.$$
Wir setzen die Ausdrücke für $h_y(x,y)$ und $\varepsilon_{h,x}$ in die letzte Gleichung ein und erhalten:
$$\begin{aligned}
h(x,y) &= \frac{y\left(-\frac{x^6}{y^2} + 3\,x^2\,y^2\right)}{5 - \frac{6\,x^6 + 2\,x^2\,y^4}{x^6 + x^2\,y^4}} \\
&= \frac{\left(-\frac{x^6}{y} + 3\,x^2\,y^3\right)\,(x^6 + x^2\,y^4)}{5\,x^6 + 5\,x^2\,y^4 - 6\,x^6 - 2\,x^2\,y^4} \\
&= \frac{(-x^6 + 3\,x^2\,y^4)\,(x^6 + x^2\,y^4)}{y\,(-x^6 + 3\,x^2\,y^4)} \\
&= \frac{x^6 + x^2\,y^4}{y}.
\end{aligned}$$
Es folgt:
$$h(x,y) = \frac{x^6}{y} + x^2\,y^3.$$

Teil II: Multiple-Choice Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☒
2.	☐	☐	☐	☒
3.	☐	☐	☒	☐
4.	☒	☐	☐	☐
5.	☐	☐	☐	☒
6.	☒	☐	☐	☐
7.	☒	☐	☐	☐
8.	☐	☐	☒	☐

1. Antwort (d). Es gilt die folgende Wahrheitstabelle:

A	T	T	F	F
B	T	F	T	F
$A \vee B$	T	T	T	F
$A \wedge B$	T	F	F	F
$(A \vee B) \Rightarrow B$	T	F	T	T
$(A \vee B) \Leftrightarrow A$	T	T	F	T
$(A \wedge B) \Leftrightarrow A$	T	F	T	T
$(A \wedge B) \Rightarrow A$	**T**	**T**	**T**	**T**

Folglich ist $(A \wedge B) \Rightarrow A$ die einzige Tautologie.

2. Antwort (d). Es gilt:

- (a) ist falsch. Betrachte das Beispiel $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = \frac{1}{x}$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und f is differenzierbar auf $(0,\infty)$. Jedoch ist die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$ divergent.
- (b) ist falsch. Betrachte das Beispiel $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = x^2$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Jedoch ist die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$ monoton und konvergent.
- (c) ist falsch. Betrachte das Beispiel $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = \sin(2\,\pi\,x)$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und f ist differenzierbar auf $\mathbb{R}$. Jedoch ist die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \sin\left(\frac{2\pi}{n}\right)$ nicht monoton.

3. Antwort (c). (a) ist offensichtlich falsch, (b) ist die Definition einer monoton fallenden Funktion auf $[0, 10]$, während (c) der Definition einer monoton wachsenden Funktion auf $[0, 10]$ entspricht. (d) ist wiederum falsch, wie folgendes Beispiel zeigt: Sei $f(x) = x^2$ für $x \in (0, 10]$ und $f(0) = 100$. Die Funktion f ist differenzierbar auf $(0, 10)$ mit $f'(x) = 2\,x > 0$ auf $(0, 10)$. Jedoch ist f nicht monoton steigend, da $f(0) > f(x)$ für alle $x \in (0, 10)$.

4. Antwort (a). Projekt I sollte für jeden strikt positiven Zinssatz bevorzugt werden, da ein Gewinn von $20'000$ CHF erwartet wird (entspricht demselben Betrag wie für Projekt II), wovon ein Teil jedoch bereits früher resultiert (d.h. bereits in 6 Monaten). Formal ist der Barwert von Projekt I $-100'000 + \frac{40'000}{(1+i)} + \frac{60'000}{(1+i)^2}$ bzw. von Projekt II $-110'000 + \frac{130'000}{(1+i)^2}$, wobei i den halbjährlichen

Zinssatz darstellt. Folglich sollte Projekt I gegenüber Projekt II bevorzugt werden, wenn

$$\begin{aligned}
& -100'000 + \frac{40'000}{(1+i)} + \frac{80'000}{(1+i)^2} > -110'000 + \frac{130'000}{(1+i)^2} \\
\Leftrightarrow\quad & 10'000 + \frac{40'000}{(1+i)} - \frac{50'000}{(1+i)^2} > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 10'000\,(1+i)^2 + 40'000\,(1+i) - 50'000 > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & (1+i)^2 + 4\,(1+i) - 5 > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & 1 + 2\,i + i^2 + 4 + 4\,i - 5 > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & i^2 + 2\,i > 0 \\
\Leftrightarrow\quad & i < -2 \text{ or } i > 0
\end{aligned}$$

Projekt I wird deshalb für alle strikt positiven Zinssätze dem Projekt II vorgezogen.

5. Antwort (d). Die einzige generelle Aussage für einen strikt positiven Zinssatz ist $C^D < C^I$, wenn $n^D \geq n^I$. Dies folgt daraus, weil Auszahlungen bei strikt positivem Zinssatz zu Beginn des Jahres einen höheren Zins abwerfen als Auszahlungen später im Jahr. Deshalb sind (a), (b) und (c) falsch.

6. Antwort (a). Offensichtlich ist f stetig für $x \neq 0$. Überdies gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} f(x) &= \lim_{x\to 0} \frac{(\sin(x))^2}{a\,x^2} \\
&\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\,\sin(x)\,\cos(x)}{2\,a\,x} \\
&\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 0} \frac{2\,(\cos^2(x) - \sin^2(x))}{2\,a} \\
&= \frac{1}{a}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f stetig bei $x = 0$ ist genau dann, wenn $\frac{1}{a} = a$, d.h., $a^2 = 1$. Diese Gleichung hat Lösungsmenge $\{-1, 1\}$.

7. Antwort (a). Das Restglied $R_4(x)$ bei $x_0 = 0$ entspricht

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5$$

für ein ξ. Wegen $f^{(5)}(\xi) = 2 \cdot 5!$ für alle ξ, folgt:

$$R_4(x) = 2\,x^5.$$

Deshalb ist $R_4(x) > 0$ für $x > 0$ und $R_4(x) = 0$ für $x = 0$.

8. Antwort (c). Es gilt:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = x\,\rho_f(x).$$

Damit folgt:

$$\rho_f(x) = \frac{\varepsilon_f(x)}{x} = \ln(x) + \frac{e^{3\,x}}{x}.$$

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☒	☐
2.	☐	☒	☐	☐
3.	☐	☐	☐	☒
4.	☐	☐	☐	☒
5.	☐	☒	☐	☐
6.	☐	☐	☐	☒
7.	☐	☐	☐	☒
8.	☐	☐	☒	☐

1. Antwort (c). Es gilt:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = x\,\frac{2\,x\,e^{-x} - x^2\,e^{-x}}{x^2\,e^{-x}} = 2 - x.$$

Also ist f elastisch (unelastisch) bei x_0 genau dann, wenn $|\varepsilon_f(x)| > 1$ (< 1). Es gilt:

$$|\varepsilon_f(x)| < 1 \Leftrightarrow |2 - x| < 1 \Leftrightarrow (2 - x)^2 < 1 \Leftrightarrow (x - 3)\,(x - 1) < 0 \Leftrightarrow x \in (1, 3).$$

Deshalb ist (c) richtig.

2. Antwort (b). Weil die Wurzelfunktion differenzierbar und streng monoton wachsend ist, betrachten wir die Funktion $g(x) = x^2\,e^{x^2} + 1$ anstelle der Funktion f. Weil g ebenfalls differenzierbar ist, erfüllt ein stationärer Punkt von g die Gleichung $g'(x) = 0$. Es gilt zudem:

$$g'(x) = 2\,x\,e^{x^2} + 2\,x^3\,e^{x^2} = 2\,(x + x^3)\,e^{x^2}.$$

Folglich ist $g'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, d.h. $x = 0$ ist der einzige stationäre Punkt von g. Überdies gilt:

$$g''(x) = 2\,(1 + 3\,x^2)\,e^{x^2} + (2\,x + 2\,x^3)\,e^{x^2}\,(2\,x) = 2\,e^{x^2}\,(1 + 5\,x^2 + 2\,x^4).$$

Daraus folgt:

$$g''(0) = 2 > 0,$$

womit $x = 0$ ein lokales Minimum von g ist (und deshalb auch von f).

3. Antwort (d). Weil

$$P_5(x) = P_4(x) + \frac{f^{(5)}(0)}{5!}\,x^5,$$

müssen wir nur $f^{(5)}$ bestimmen. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{-1}{(1 + x)^2} \\
f''(x) &= \frac{2}{(1 + x)^3} \\
f'''(x) &= \frac{-6}{(1 + x)^4} \\
f^{(4)}(x) &= \frac{24}{(1 + x)^5} \\
f^{(5)}(x) &= \frac{-120}{(1 + x)^6}.
\end{aligned}$$

Deshalb ist $f^{(5)}(0) = -120$ und

$$P_5(x) = P_4(x) - x^5.$$

Abhängig von $x > 0$, $x < 0$ oder $x = 0$ gilt $P_4(x) > P_5(x)$, $P_4(x) < P_5(x)$ oder $P_4(x) = P_5(x)$.

4. Antwort (d). Für die Funktion f gilt

$$(x, y) \in D_f \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 25 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geq 5^2.$$

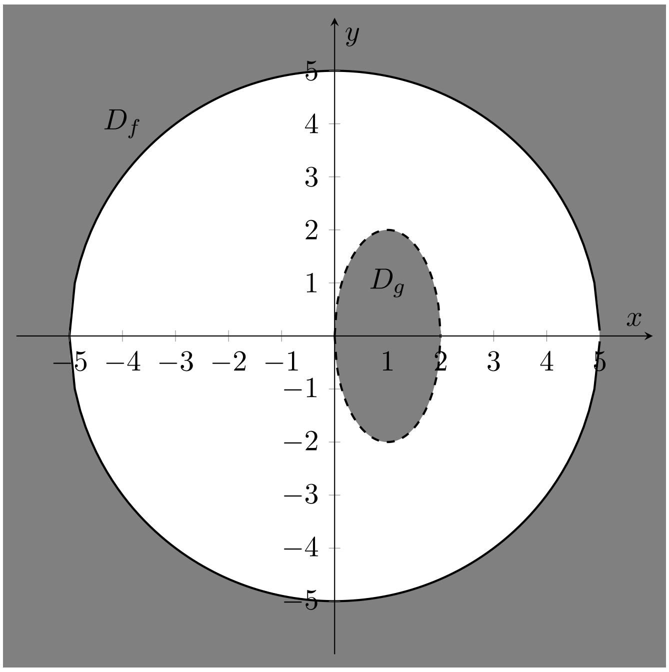
Dies entspricht der Fläche ausserhalb des Kreises mit Zentrum $(0, 0)$ und Radius 5 inklusive dessen Rand.

Für die Funktion g gilt

$$(x, y) \in D_g \Leftrightarrow 8\,x - 4\,x^2 - y^2 > 0 \Leftrightarrow \frac{(x-1)^2}{1^2} + \frac{(y-0)^2}{2^2} < 1.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb der Ellipse mit Zentrum $(1, 0)$ und Halbachsen $a = 1$ und $b = 2$.

Daraus folgt, dass sich die Definitionsbereiche von f und g nicht schneiden.



5. Antwort (b). Das Theorem von Taylor impliziert

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,x^5.$$

Daraus folgt:

$$R_{f,4}(x) = 3\,x^5 \quad \text{und} \quad R_{g,4}(x) = -2\,x^5.$$

Deshalb gilt

$$R_{f,4}(x) > R_{g,4}(x)$$

für $x > 0$.

6. Antwort (d). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= 8\left(\frac{1}{(\lambda\,x)^3} + \frac{1}{5\,(\lambda\,y)^3}\right)^{-\frac{1}{6}} + \sqrt[3]{3\,\lambda\,x} + \sqrt[6]{(\lambda\,y)^2} \\
&= 8\left[\frac{1}{\lambda^3}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{5\,y^3}\right)\right]^{-\frac{1}{6}} + \lambda^{\frac{1}{3}}\,\sqrt[3]{3\,x} + \lambda^{\frac{2}{6}}\,\sqrt[6]{y^2} \\
&= 8\,\lambda^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{5\,y^3}\right)^{-\frac{1}{6}} + \lambda^{\frac{1}{3}}\,\sqrt[3]{3\,x} + \lambda^{\frac{1}{3}}\,\sqrt[6]{y^2} \\
&= \lambda^{\frac{1}{3}}\left\{8\,\lambda^{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{5\,y^3}\right)^{-\frac{1}{6}} + \sqrt[3]{3\,x} + \sqrt[6]{y^2}\right\} \\
&= \lambda^{\frac{1}{3}}\left\{8\,\lambda^{\frac{1}{6}}\left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{5\,y^3}\right)^{-\frac{1}{6}} + \sqrt[3]{3\,x} + \sqrt[6]{y^2}\right\}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f nicht homogen ist.

7. Antwort (d). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
g(\lambda\,x, \lambda\,y) &= f(\lambda\,a\,x, \lambda\,a^2\,y) \\
&= \frac{(\lambda\,a\,x)^3}{\lambda\,a^2\,y} + 1 + \sqrt{(\lambda\,a\,x)^4 + 2\,(\lambda\,a^2\,y)^4} \\
&= \lambda^2\,\frac{(a\,x)^3}{a^2\,y} + 1 + \lambda^2\,\sqrt{(a\,x)^4 + 2\,(a^2\,y)^4} \\
&= \lambda^2\left[\frac{(a\,x)^3}{a^2\,y} + 1 + \sqrt{(a\,x)^4 + 2\,(a^2\,y)^4}\right] + (1-\lambda^2) \\
&= \lambda^2\,g(x,y) + (1-\lambda^2).
\end{aligned}$$

Deshalb ist g nicht homogen.

8. Antwort (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= (\lambda\,x)^{a-1}\,(\lambda\,y)^{a+6} + \sqrt{(\lambda\,x)^2 + (\lambda\,y)^2} \\
&= \lambda^{a-1+a+6}\,x^{a-1}\,y^{a+6} + \lambda\,\sqrt{x^2 + y^2}.
\end{aligned}$$

Deshalb ist f homogen genau dann, wenn

$$a - 1 + a + 6 = 1 \Leftrightarrow a = -2.$$