Mathematik B
Nachholprüfung Frühjahrssemester 2017

Dr. Reto Schuppli*

07. Februar 2018

This is Version 1.1 [25. November 2017].

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (7 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen definiert durch

$$f(x, y) = a\,y^2 + 2axy + x^4 \quad (a \in \mathbb{R}_{++}).$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte und bestimmen Sie gegebenenfalls, ob ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 1

(a) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(b) (7 Punkte)

Die Funktion

$$f(x, y) = 2x^2 + y^2$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x, y) = x^2 - axy + by^2 + 15 = 0$$

zu optimieren.
Bestimmen Sie die Parameter $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass im Punkt $(1, 2)$ eine mögliche Extremstelle sein könnte.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich bei $(1, 2)$ tatsächlich um eine Extremstelle (und nicht um einen Sattelpunkt) handelt und von welcher Art die Extremstelle ist (Maximum oder Minimum), wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(c) (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_1^e x^2 \ln(\sqrt{x})\,dx.$$

Aufgabe 1

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(d) (6 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_1^\infty \frac{e^x + x\, e^x}{(x\, e^x)^3}\, dx.$$

Aufgabe 1

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (4 Punkte)

Die quadratischen $n \times n$ Matrizen A und B seien regulär.

Beweisen Sie: Die Matrix $C = B^{-1}\, A\, A^T\, (B^T)^{-1}$ ist symmetrisch.

Aufgabe 2

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = x\,\sin(y) + a\,\ln(x+2) + \frac{x\,y}{\pi}, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie den Gradienten von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (-1, \pi)$.

Wie muss der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) = (-1, \pi)$ in der Richtung des Vektors $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ am stärksten *abnimmt*?

Aufgabe 2

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(c) (3 Punkte)

Ermitteln Sie eine Basis des Vektorraumes

$$V = \{\, \mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \mid x_1 + x_2 = 0 \;\wedge\; x_1 + 5\,x_2 - 2\,x_3 = 0 \;\wedge\; x_1 - x_3 + x_5 = 0 \,\}.$$

Aufgabe 2

(d) (6 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ -5\,a & 5 & 4 \end{pmatrix}, \; a \in \mathbb{R}.$$

Weisen Sie nach, dass M den Eigenwert $\lambda = 3$ besitzt.

Berechnen Sie den zum Eigenwert $\lambda = 3$ gehörenden Eigenraum.

Berechnen Sie die anderen Eigenwerte der Matrix M.

Aufgabe 2

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(e) (8 Punkte)

Gegeben ist das lineare Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcl} 4\,x_1 & & & + & 4\,x_3 & = & 8 \\ 12\,x_1 & + & 16\,x_2 & + & 8\,x_3 & = & 36+4r \\ & & x_2 & - & 2\,x_3 & = & s \\ 3\,x_1 & + & 2\,x_2 & + & 3\,x_3 & = & 9-2r+s \\ x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 3 \end{array} .$$

Für welche Werte der Parameter $r \in \mathbb{R}$, $s \in \mathbb{R}$ ist das Gleichungssystem lösbar?

Wie lautet die zugehörige Lösung des Gleichungssystems?

Aufgabe 2

(e) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden, welcher zusammen mit den Prüfungsaufgaben ausgehändigt wird. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktion $f(x, y) = -x$ hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} - 1 = 0$ ihr Minimum in

(a) $P = (-2, 0)$.

(b) $P = (0, 5)$.

(c) $P = (2, 0)$.

(d) $P = (3, 1)$.

Aufgabe 3

Frage 2 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} a\,(x-2)^2 - 1 & \text{für } 2 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) f ist für alle $a \in \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion.

(b) f ist nur für $a = \frac{9}{8}$ eine Dichtefunktion.

(c) f ist nur für $a = -\frac{8}{9}$ eine Dichtefunktion.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion.

Aufgabe 3

Frage 3 (3 Punkte)

$A = (a_{ij})$ sei eine 6×4 Matrix. Dann gilt:

(a) Der Rang von A^T ist mindestens 4.

(b) Der Rang von A^T ist kleiner als 5.

(c) Der Rang von A^T ist höchstens 6.

(d) Die Matrix A^T hat mindestens eine reguläre 4×4-Untermatrix.

Aufgabe 3

Frage 4 (2 Punkte)

A und B seien quadratische Matrizen mit $\det(A) = 2$ und $\det(B) = -3$; die Matrix C ist definiert durch $C = A^2 + 3\,B$. Dann gilt:

(a) $\det(C) = 13$.

(b) $\det(C) = -5$.

(c) $\det(C) = -36$.

(d) Man kann im Allgemeinen keine Aussage über $\det(C)$ machen.

Aufgabe 3

Frage 5 (4 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ t \end{pmatrix}.$$

(a) Es ist nur für $t = 6$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(b) Es ist nur für $t = 6$ und $t = 0$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(c) Es ist für alle $t \in \mathbb{R}$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(d) Es ist für kein $t \in \mathbb{R}$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

Aufgabe 3

Frage 6 (2 Punkte)

A ist eine 5×4 Matrix und $rg(A; \mathbf{b}) = 4$. Dann gilt:

(a) Das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat sicher keine Lösung.

(b) Das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat keine oder eine eindeutige Lösung.

(c) Das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen.

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Aufgabe 3

Frage 7 (4 Punkte)

Das unbestimmte Integral von

$$\int \frac{x}{5\,x+2}\,dx,\ \ (x>0)$$

ist

(a) $\frac{x}{5} - \frac{2}{25}\,\ln(5\,x+2) + C$.

(b) $\frac{\frac{1}{2}\,x^2}{\frac{5}{2}\,x^2+2\,x} + C$.

(c) $\frac{1}{2}\,x^2\,\ln(5\,x+2) + C$.

(d) Keine der obigen Antworten ist korrekt.

Aufgabe 3

Frage 8 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix A und der Vektor **b**:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^n \, \mathbf{b} = \mathbf{b}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(b) $A^n \, \mathbf{b} = 2^n \, \mathbf{b}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(c) $A^n \, \mathbf{b} = 3^n \, \mathbf{b}$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(d) Keine der vorausgehenden Aussagen ist richtig.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Das uneigentliche Integral

$$\int_{-\infty}^{1} e^{2x+1}\,dx$$

hat den Wert

(a) e^2.

(b) $\frac{e^3}{2}$.

(c) $\frac{e^4}{5}$.

(d) Das uneigentliche Integral existiert nicht.

Aufgabe 4

Frage 2 (3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_{++}$ eine Funktion zweier Variablen definiert durch

$$f(x, y) = x^2 - \ln(y).$$

Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}_{++}$ ist der Gradient von f im Punkt (t, t) senkrecht zum Vektor $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$?

(a) $t = \sqrt{0.5}$ und $t = -\sqrt{0.5}$.

(b) $t = \frac{1}{2}$.

(c) $t = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

(d) $\mathbf{b}$ und $\mathbf{grad} f(t, t)$ sind für kein $t \in \mathbb{R}_{++}$ orthogonal.

Aufgabe 4

Frage 3 (4 Punkte)

Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & 5 & 6 \\ -2 & -1 & 2 & 4 & 9 \\ 9 & 5 & -10 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 & -7 & 1 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Aufgabe 4

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben ist die 2×2-Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(b) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

(c) $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4

Frage 5 (2 Punkte)

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$$

hat den Eigenvektor

(a) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -4 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

(c) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} -8 \\ 6 \end{pmatrix}$.

(d) $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 4

Frage 6 (3 Punkte)

Gegeben ist das Anfangswertproblem

$$\begin{aligned} &(1-a)\, y_{k+1} + a\, y_k - 1 = 0, \text{ wobei } a \neq -1,\ a \neq 0 \\ &y_0 = 2 \end{aligned}\ .$$

Für welchen Wert des Parameters a gilt $y_1 = \frac{5}{3}$?

(a) $a = 2$.

(b) $a = -2$.

(c) $a = \frac{1}{2}$.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4

Frage 7 (2 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$3\,(y_k - 2\,y_{k+1}) = 6 - 7\,y_k$$

ist

(a) oszillierend und konvergent.

(b) oszillierend und divergent.

(c) monoton und konvergent.

(d) monoton und divergent.

Aufgabe 4

Frage 8 (4 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$(2-c)\, y_{k+1} + (1+c)\, y_k = 2,$$

wobei $c \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ ist, ist genau dann oszillierend und divergent, wenn

(a) $c > 2$.

(b) $c \in [\frac{1}{2}, 2)$.

(c) $c < -\frac{1}{2}$.

(d) Die allgemeine Lösung der obigen Differenzengleichung ist für kein $c \in \mathbb{R} \setminus \{2\}$ oszillierend und divergent.

Nachholprüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2017

2'200 Mathematik B

Antwortbogen Multiple-Choice-Fragen

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Nachholprüfungen Assessment-Stufe: Frühjahrssemester 2017

2'200 Mathematik B

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐