Mathematik A
Prüfung Herbstsemester 2017

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

30. Januar 2018

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a1) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f\to\mathbb{R},\ x\mapsto y=\ln\left(\sqrt{x-2}-4\right)+\ln\left(\sqrt{x-2}+4\right).$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f von f.

Hinweis: Vereinfachen Sie zunächst die Logarithmusterme.

Lösung:

Zunächst nutzen wir die Eigenschaft $\ln(a)+\ln(b)=\ln(a\,b)$ (für $a,b>0$), um die Logarithmusterme zu vereinfachen, und erhalten:

$$\begin{aligned} y &= \ln\left(\sqrt{x-2}-4\right)+\ln\left(\sqrt{x-2}+4\right)\\ &= \ln\left(\left(\sqrt{x-2}-4\right)\,\left(\sqrt{x-2}+4\right)\right)\\ &= \ln(x-2-16)\\ &= \ln(x-18). \end{aligned}$$

Die Funktion f ist folglich genau dann definiert, wenn $x-18>0$, d.h., $x>18$. Wir überprüfen, dass für $x>18$ die beiden Summanden in der ersten Zeile definiert sind und damit die Vereinfachung von Zeile 1 zu Zeile 2 zulässig ist. Es folgt:

$$D_f=(18,\infty).$$

Ausserdem gilt:

$$x\in D_f\Leftrightarrow x>18\Leftrightarrow f(x)=\ln(x-18)\in\mathbb{R}$$

und folglich

$$R_f=\mathbb{R}.$$

Ohne die vorangehende Termvereinfachung erhält man die Bedingung an das Definitionsgebiet von f wie folgt:

$$x\in D_f\Leftrightarrow\left\{\begin{array}{c} x-2\geq 0\\ \sqrt{x-2}-4>0\\ \sqrt{x-2}+4>0\end{array}\right.\Leftrightarrow\sqrt{x-2}-4>0\Leftrightarrow x-2>16\Leftrightarrow x>18.$$

Aufgabe 1

(a2) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R},\; x \mapsto y = \ln\left(\sqrt{x-2}-4\right) + \ln\left(\sqrt{x-2}+4\right).$$

Ist die Funktion f auf ihrem Definitionsgebiet streng konkav (Beweis)?

Lösung:

Wir verwenden das folgende Resultat: Ist f zweimal differenzierbar mit $f''(x) < 0$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist f streng konkav auf (a,b).

In unserem Fall gilt $f(x) = \ln(x-18)$, d.h., $f'(x) = \frac{1}{x-18}$ und $f''(x) = \frac{-1}{(x-18)^2}$. Demnach gilt $f''(x) < 0$ für alle $x \in (18,\infty)$ und folglich ist die Funktion f streng konkav auf ihrem kompletten Definitionsgebiet.

Aufgabe 1

(a3) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f\to\mathbb{R},\;x\mapsto y=\ln\left(\sqrt{x-2}-4\right)+\ln\left(\sqrt{x-2}+4\right).$$

Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Lösung:

Für $y\in R_f=\mathbb{R}$ gilt:

$$y=\ln(x-18)\Leftrightarrow e^y=x-18\Leftrightarrow e^y+18=x.$$

Mit $D_{f^{-1}}=R_f=\mathbb{R}$ und $R_{f^{-1}}=D_f=(18,\infty)$ folgt:

$$f^{-1}\,:\,\mathbb{R}\to(18,\infty),\quad x\mapsto y=f^{-1}(x)=e^x+18.$$

Aufgabe 1

(b) (6 Punkte)

Um seine Geschäftsidee zu finanzieren, nimmt ein Start-up einen Kredit in Höhe von 1′000′000 CHF auf. Die Bank stimmt einem niedrigeren jährlichen Zinssatz von 0.5% während der ersten 5 Jahre zu, in denen das Start-up am Ende jeden Jahres 10′000 CHF zurückzahlen muss. Danach steigt der Zinssatz auf 2% p.a. und es werden konstante Zahlungen in Höhe von C^I CHF vereinbart, die wieder am Ende jeden Jahres fällig sind. Der Plan sieht vor, dass der Kredit in 15 Jahren zurückgezahlt ist.

Wie hoch müssen die jährlichen Zahlungen C^I sein, sodass der Plan des Start-ups umsetzbar ist?

Lösung:

Die konstanten Zahlungen über 10′000 CHF am Ende jeden Jahres für die *ersten* 5 Jahre stellen eine nachschüssige 5-jährige Rente dar. Ihr Endwert nach 5 Jahren beträgt

$$A_5 = 10'000 \, \frac{(1+0.5\%)^5 - 1}{0.5\%} \approx 50'502.50 \text{ (CHF)}.$$

Die konstanten Zahlungen C^I CHF am Ende jeden Jahres für die *nächsten* 10 Jahre stellen eine nachschüssige 10-jährige Rente dar. Ihr Endwert nach 10 Jahren (d.h. am Ende des 15. Jahres) beträgt

$$A_{10} = C^I \cdot \frac{(1+2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%}.$$

Der Barwert zum Zeitpunkt 0 von A_5 und A_{10} muss 1′000′000 CHF entsprechen, d.h.,

$$\begin{aligned}
&1'000'000 = \frac{A_5}{(1+0.5\%)^5} + \frac{A_{10}}{(1+0.5\%)^5\,(1+2.0\%)^{10}} \\
&\Leftrightarrow \quad 1'000'000 \cdot (1+0.5\%)^5 = A_5 + \frac{A_{10}}{(1+2.0\%)^{10}} \\
&\Leftrightarrow \quad 1'000'000 \cdot (1+0.5\%)^5 = 10'000 \cdot \frac{(1+0.5\%)^5 - 1}{0.5\%} + \frac{C^I}{(1+2.0\%)^{10}} \cdot \frac{(1+2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%} \\
&\Leftrightarrow \quad \frac{C^I}{(1+2.0\%)^{10}} \cdot \frac{(1+2.0\%)^{10} - 1}{2.0\%} = 1'000'000 \cdot (1+0.5\%)^5 - 10'000 \cdot \frac{(1+0.5\%)^5 - 1}{0.5\%} \\
&\Leftrightarrow \quad C^I = \frac{1'000'000 \cdot (1+0.5\%)^5 - 10'000 \cdot \frac{(1+0.5\%)^5-1}{0.5\%}}{\frac{(1+2.0\%)^{10}-1}{2.0\%}} \, (1+2.0\%)^{10} \\
&\Leftrightarrow \quad C^I \approx 108'515.40 \text{ (CHF)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1

(c) (4 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4}\, e^{-\frac{1}{x^2}}.$$

Lösung:

Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 0} \frac{2}{x^4}\, e^{-\frac{1}{x^2}} &\overset{y=\frac{1}{x^2}}{=} \lim_{y\to\infty} 2\,y^2\,e^{-y} \\
&= \lim_{y\to\infty} \frac{2\,y^2}{e^y} \\
&\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{4\,y}{e^y} \\
&\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{y\to\infty} \frac{4}{e^y} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Aufgabe 1

(d) (6 Punkte)

Eine professionelle Langstreckenläuferin läuft in der ersten Stunde 20 Kilometer. Danach nimmt ihre Leistung in jeder weiteren Stunde des Laufens um einen Faktor $a \in (0,1]$ ab, das heisst beispielsweise, in der zweiten Stunde läuft sie noch $20 * (1-a)$ Kilometer. Für welche Werte $a \in (0,1]$ und $b \geq 20$ wird die Läuferin einen Wettkampf mit einer Länge von b Kilometern bewältigen können, gegeben dass sie beliebig lange laufen kann?

Stellen Sie die Lösungsmenge graphisch (in einem (a,b)-System) dar.

Lösung:

Sei a_n die Anzahl der in der n-ten Stunde gerannten Kilometer. Es gilt:

$$\begin{aligned} a_1 &= 20, \\ a_n &= a_{n-1}(1-a), \quad n = 2,3,\ldots \end{aligned}$$

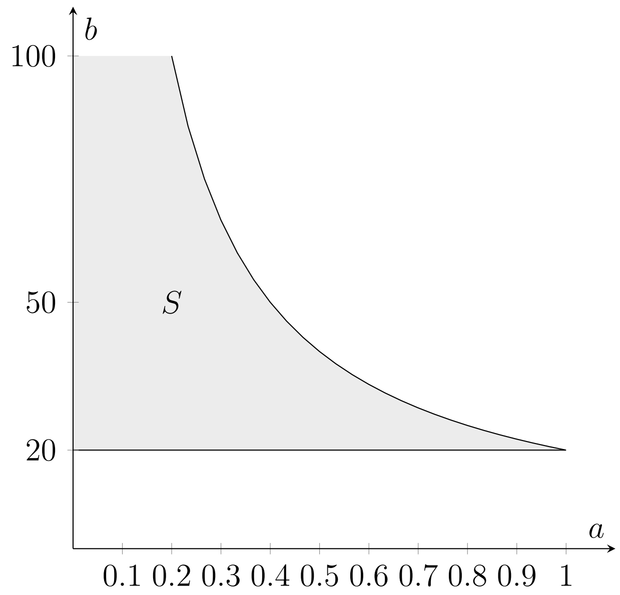
d.h., $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine geometrische Folge mit $a_1 = 20$ und $q = (1-a)$.

Die Bedingung dafür, dass die Läuferin einen b Kilometer langen Wettkampf beendet, gegeben, dass sie beliebig lange laufen kann, ist folglich:

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \geq b \Leftrightarrow \frac{a_1}{1-q} \geq b \Leftrightarrow \frac{20}{1-(1-a)} \geq b \Leftrightarrow \frac{20}{a} \geq b.$$

Demnach erhalten wir folgende Lösungsmenge:

$$S = \left\{ (a,b) \in (0,1] \times [20,\infty) \,:\, b \leq \frac{20}{a} \right\}.$$



Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (5 Punkte)

Sei $a_k = \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right)$ für $k = 1, 2, \ldots$

Verwenden Sie das Taylorpolynom P_2 zweiter Ordnung der Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R},\; x \mapsto y = f(x) = \ln(1+x)$$

im Punkt $x_0 = 0$, um einen Näherungswert für $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ zu bestimmen.

Lösung:

Das Taylorpolynom zweiter Ordnung von f in x_0 ist definiert als:

$$P_2(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2.$$

Mit $x_0 = 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(0) = \ln(1+0) = 0 \\ f'(x) &= \frac{1}{1+x} \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{1} = 1 \\ f''(x) &= -\frac{1}{(1+x)^2} \Rightarrow f''(x_0) = f''(0) = -\frac{1}{1^2} = -1. \end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P_2(x) = x - \frac{1}{2}\,x^2.$$

Damit erhalten wir:

$$a_k = \ln\left(1 + \left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \approx P_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{2k} = \left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^k.$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} a_k &\approx \sum_{k=1}^{\infty}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^k\right] \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k - \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4}\right)^k \\ &= \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\,\frac{1}{1-\frac{1}{4}} \\ &= \frac{1}{2}\cdot 2 - \frac{1}{8}\cdot\frac{4}{3} \\ &= 1 - \frac{1}{6} \\ &= \frac{5}{6}. \end{aligned}$$

Aufgabe 2

(a2) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = f(x) = \ln(1+x).$$

R_2 bezeichne das Restglied zweiter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Zeigen Sie

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \leq \frac{1}{21}.$$

Lösung:

Nach dem Satz von Taylor gilt:

$$R_2(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}\,x^3$$

mit $\xi \in [0, x]$.
Es gilt:

$$f^{(3)}(x) = \frac{2}{(1+x)^3}.$$

Daraus folgt für $x \in [0,1]$,

$$|R_2(x)| = \frac{\left|f^{(3)}(\xi)\right|}{3!}\,|x|^3 = \frac{2}{3!}\,\underbrace{\frac{1}{(1+\xi)^3}}_{\leq 1}\,x^3 \leq \frac{1}{3}\,x^3.$$

Demnach gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} R_2\left(\left(\frac{1}{2}\right)^k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3}\left[\left(\frac{1}{2}\right)^k\right]^3 = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^k = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{1-\frac{1}{8}} = \frac{1}{3}\cdot\frac{1}{7} = \frac{1}{21}.$$

Aufgabe 2

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = \frac{\ln(9 - 9\,x^2 - y^2)}{(x-y)\,\sqrt{4 - x^2 - y^2}}.$$

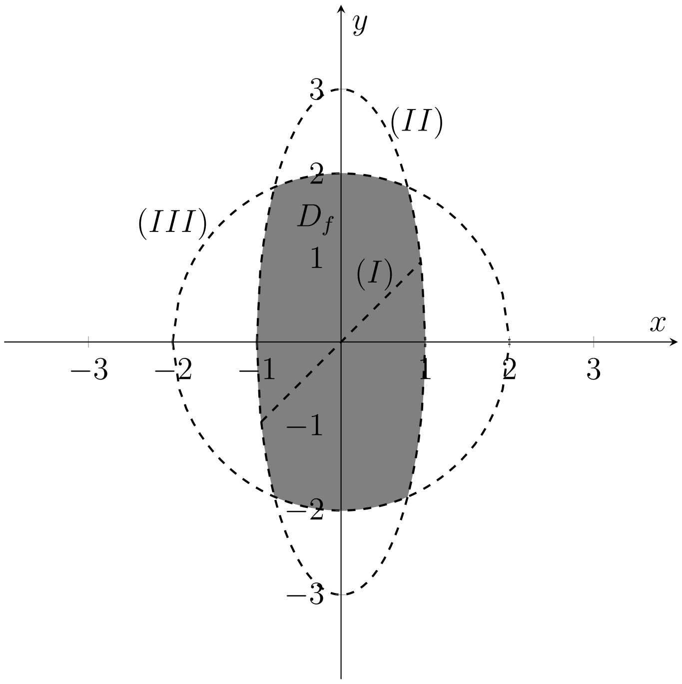
Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f von f und stellen Sie diesen graphisch dar.

Lösung:

Es gilt:

$$x \in D_f \Leftrightarrow \begin{cases} x - y \neq 0 \\ 9 - 9\,x^2 - y^2 > 0 \\ 4 - x^2 - y^2 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq y \ (I) \\ x^2 + \frac{y^2}{3^2} < 1 \ (II) \\ x^2 + y^2 < 2^2 \ (III) \end{cases} .$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb einer Ellipse (II) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a = 1$ und $b = 3$, geschnitten mit der Fläche innerhalb eines Kreises (III) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $r = 2$. Weiterhin müssen die Punkte auf der Geraden $y = x$ ausgeschlossen werden (I). Die Gerade $y = x$ schneidet die Ellipse für $x^2 + \frac{x^2}{9} = 1$, d.h., $x^2 = \frac{9}{10}$ oder $x = \pm\frac{3}{\sqrt{10}}$. Die folgende Abbildung zeigt den Definitionsbereich von f:



Aufgabe 2

(c) (5 Punkte)

Gegeben sei die Nutzenfunktion

$$u(c_1, c_2) = c_1^{\alpha}\, c_2^{1-\alpha}$$

für $\alpha \in (0,1)$, wobei c_1, c_2 die konsumierten Mengen der Güter 1 und 2 sind, und die Budgetrestriktion

$$C \;:\; p_1\, c_1 + p_2\, c_2 = 10$$

für Preise $p_1 > 0$ und $p_2 > 0$.

Für welche Werte der Parameter α, p_1, p_2 berührt die Niveaulinie (Indifferenzkurve) $u(c_1, c_2) = \sqrt{2}$ die Budgetlinie C im Konsumgüterbündel $(c_1^\star, c_2^\star) = (1,2)$?

Lösung:

Die Parameter α, p_1, p_2 müssen so gewählt werden, dass die folgenden drei Bedingungen gelten:

(i) Das Konsumgüterbündel $(c_1^\star, c_2^\star) = (1,2)$ liegt auf der Budgetgeraden, d.h., $p_1 + 2\,p_2 = 10$. Es folgt $p_1 = 10 - 2\,p_2$.

(ii) Das Konsumgüterbündel $(c_1^\star, c_2^\star) = (1,2)$ liefert den Nutzen $\sqrt{2}$, d.h., $u(c_1^\star, c_2^\star) = 1^{\alpha}\, 2^{1-\alpha} = \sqrt{2}$. Demnach gilt $\alpha = 0.5$.

(iii) Die Kurven

$$f(c_1, c_2) = u(c_1, c_2) - \sqrt{2} = c_1^{0.5}\, c_2^{0.5} - \sqrt{2} = 0$$

und

$$\varphi(c_1, c_2) = p_1\, c_1 + p_2\, c_2 - 10 = 0$$

berühren sich in $(c_1^\star, c_2^\star) = (1,2)$, d.h. (Implizites Funktionen Theorem),

$$\begin{aligned}
& -\frac{f_{c_1}(1,2)}{f_{c_2}(1,2)} = -\frac{\varphi_{c_1}(1,2)}{\varphi_{c_2}(1,2)} \\
\overset{\alpha=0.5}{\Leftrightarrow}\quad & -\frac{0.5\, c_1^{-0.5}\, c_2^{0.5}}{0.5\, c_1^{0.5}\, c_2^{-0.5}}\bigg|_{(c_1,c_1)=(1,2)} = -\frac{p_1}{p_2} \\
\overset{p_1=10-2\,p_2}{\Leftrightarrow}\quad & 2 = \frac{10 - 2\,p_2}{p_2} \\
\Leftrightarrow\quad & 2\,p_2 = 10 - 2\,p_2 \\
\Leftrightarrow\quad & p_2 = \frac{5}{2}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten $p_1 = 10 - 2 \cdot \frac{5}{2} = 5$, $p_2 = \frac{5}{2}$ und $\alpha = 0.5$.

Aufgabe 2

(d) (6 Punkte)

Die Funktionen f und g sind auf $\mathbb{R}^2_{++}$ definiert und haben den Wertebereich $\mathbb{R}_{++}$. Ausserdem ist die Funktion f homogen vom Grad r und die Funktion g homogen vom Grad $r-2$. Für die Funktion h gilt:

$$h(x,y) = \frac{f(x,y)}{g(x,y)},$$

$$h_y(x,y) = x - \frac{3}{2}\, x^{0.5}\, y^{0.5}$$

und

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) = \frac{x\,y - \frac{1}{2}\, x^{0.5}\, y^{1.5}}{x\,y - x^{0.5}\, y^{1.5}}$$

Ermitteln Sie $h(x,y)$ und vereinfachen Sie den Funktionsterm.

Lösung:

Da f homogen vom Grad r und g homogen vom Grad $r-2$ ist, folgt

$$h(\lambda\, x, \lambda\, y) = \frac{f(\lambda\, x, \lambda\, y)}{g(\lambda\, x, \lambda\, y)} = \frac{\lambda^r\, f(x,y)}{\lambda^{r-2}\, g(x,y)} = \lambda^2\, \frac{f(x,y)}{g(x,y)} = \lambda^2\, h(x,y),$$

d.h., h ist homogen vom Grad 2. Demnach gilt mit der Eulerschen Relation:

$$x\, h_x(x,y) + y\, h_y(x,y) = 2\, h(x,y).$$

Mit

$$\varepsilon_{h,x}(x,y) = \frac{x}{h(x,y)}\, h_x(x,y)$$

erhalten wir

$$\varepsilon_{h,x}(x,y)\, h(x,y) + y\, h_y(x,y) = 2\, h(x,y),$$

d.h.,

$$h(x,y) = \frac{y\, h_y(x,y)}{2 - \varepsilon_{h,x}(x,y)}.$$

Wir setzen die Ausdrücke für $h_y(x,y)$ und $\varepsilon_{h,x}$ in die letzte Gleichung ein und erhalten:

$$\begin{aligned}
h(x,y) &= \frac{y\, \left(x - \frac{3}{2}\, x^{0.5}\, y^{0.5}\right)}{2 - \frac{x\,y - \frac{1}{2}\, x^{0.5}\, y^{1.5}}{x\,y - x^{0.5}\, y^{1.5}}} \\
&= \frac{x\,y - \frac{3}{2}\, x^{0.5}\, y^{1.5}}{2\,x\,y - 2\,x^{0.5}\, y^{1.5} - x\,y + \frac{1}{2}\, x^{0.5}\, y^{1.5}}\, \left(x\,y - x^{0.5}\, y^{1.5}\right) \\
&= \frac{x\,y - \frac{3}{2}\, x^{0.5}\, y^{1.5}}{x\,y - \frac{3}{2}\, x^{0.5}\, y^{1.5}}\, \left(x\,y - x^{0.5}\, y^{1.5}\right) \\
&= x\,y - x^{0.5}\, y^{1.5}.
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$h(x,y) = x\,y - x^{0.5}\, y^{1.5}.$$

Aufgabe 2

(d) (Fortsetzung Lösung)

Die beiden folgenden Lösungsvorschläge sind unvollständig und wurden mit 1 Punkt bewertet:

(i) Wegen $\varepsilon_{h,x}(x,y) = \frac{x}{h(x,y)}\, h_x(x,y)$ muss gelten, dass $h(x,y) = x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}$.
Grund: Der Bruch $\varepsilon_{h,x}(x,y) = \frac{x\,y - \frac{1}{2}\,x^{0.5}\,y^{1.5}}{x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}}$ kann gekürzt sein. Zu zeigen, dass tatsächlich $h(x,y) = x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}$ gilt, war die eigentliche Aufgabe.

(ii) Integration von $h_y(x,y) = x - \frac{3}{2}\,x^{0.5}\,y^{0.5}$ nach y liefert $h(x,y) = x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5}$.
Grund: Die Integration von $h_y(x,y)$ nach y liefert das unbestimmte Integral $H(x,y) = x\,y - x^{0.5}\,y^{1.5} + C(x)$, wobei $C(x)$ ein unbestimmter Ausdruck ist, welcher von x abhängt. Zu zeigen, dass tatsächlich $C(x) = 0$ gilt, war die eigentliche Aufgabe.

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (4 Punkte)

Seien A und B zwei Aussagen. Die zusammengesetzte Aussage $A \vee (\neg A \Rightarrow B)$ ist äquivalent zu

(a) A.

(b) B.

(c) $A \vee B$.

(d) $A \wedge B$.

Lösung:

Antwort (c).Es gilt die folgende Wahrheitstabelle:

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$\neg A$	F	F	W	W
$\neg A \Rightarrow B$	W	W	W	F
$A \vee (\neg A \Rightarrow B)$	**W**	**W**	**W**	**F**
$A \vee B$	**W**	**W**	**W**	**F**
$A \wedge B$	W	F	F	F

Folglich ist $A \vee (\neg A \Rightarrow B)$ äquivalent zu $A \vee B$.

Aufgabe 3

Frage 2 (3 Punkte)

Sei f eine stetige Funktion. Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monotone und konvergente Folge mit $a_n \in D_f$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$ ist

(a) konvergent.

(b) divergent.

(c) monoton.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Lösung:

Antwort (d). Es gilt:

- (a) ist falsch. Betrachte beispielsweise $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = \frac{1}{x}$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und f ist stetig auf $(0, \infty)$. Die Folge $\{b_b\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$ ist jedoch divergent.
- (b) ist falsch. Betrachte beispielsweise $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = x^2$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und f ist stetig auf $\mathbb{R}$. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \left(\frac{1}{n}\right)^2 = \frac{1}{n^2}$ ist monoton und konvergent.
- (c) ist falsch. Betrachte beispielsweise $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_n = \frac{1}{n}$ und $f(x) = \sin(2\,\pi\,x)$. Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton und konvergent und f ist stetig auf $\mathbb{R}$. Die Folge $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $b_n = f(a_n) = \sin\left(\frac{2\,\pi}{n}\right)$ ist jedoch nicht monoton.

Aufgabe 3

Frage 3 (2 Punkte)

Welche der folgenden Aussagen über eine Funktion f und einen Punkt $x_0 \in D_f$ ist wahr?

(a) Wenn f in x_0 stetig ist, dann ist f in x_0 differenzierbar.

(b) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 stetig.

(c) f ist in x_0 stetig genau dann, wenn f in x_0 differenzierbar ist.

(d) Wenn f in x_0 differenzierbar ist, dann ist f in x_0 unstetig.

Lösung:

Antwort (b). Ist die Funktion f differenzierbar in $x_0 \in D_f$, dann ist sie auch stetig in $x_0 \in D_f$. Demnach ist (b) richtig und (d) falsch. Das folgende Beispiel zeigt, dass (a) und (c) im Allgemeinen falsch sind: $f(x) = |x|$ mit Definitionsgebiet $D_f = \mathbb{R}$ und $x_0 = 0$. Die Betragsfunktion ist auf ganz $\mathbb{R}$ stetig, aber im Punkt $x_0 = 0$ nicht differenzierbar.

Aufgabe 3

Frage 4 (3 Punkte)

Ein Investor hat die Wahl zwischen zwei Projekten:

Projekt I erfordert eine Anfangsinvestition von CHF 100′000 und zahlt CHF 50′000 in 6 Monaten sowie CHF 60′000 in 1 Jahr aus.

Projekt II erfordert eine Anfangsinvestition von CHF 100′000 und zahlt in 1 Jahr CHF 110′000 aus.

(a) Projekt I ist Projekt II vorzuziehen, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(b) Projekt II ist Projekt I vorzuziehen, gegeben, dass der Zinssatz strikt positiv ist.

(c) Projekt I und Projekt II haben denselben Nettobarwert.

(d) Ob Projekt I dem Projekt II vorzuziehen ist, oder Projekt II dem Projekt I, hängt von der Höhe des strikt positiven Zinssatzes ab.

Lösung:

Antwort (a). Der Barwert von Projekt I ist $-100'000 + \frac{50'000}{(1+i)} + \frac{60'000}{(1+i)^2}$. Der Barwert von Projekt II ist $-100'000 + \frac{110'000}{(1+i)^2}$. Daher wäre Projekt I dem Projekt II vorzuziehen, wenn

$$-100'000 + \frac{50'000}{(1+i)} + \frac{60'000}{(1+i)^2} > -100'000 + \frac{110'000}{(1+i)^2} \Leftrightarrow \frac{50'000}{(1+i)} > \frac{50'000}{(1+i)^2} \Leftrightarrow 1 > \frac{1}{1+i}.$$

Die letzte Ungleichung ist für jedes $i > 0$ erfüllt.

Alternativ kann man auch ohne die tatsächliche Berechnung der Barwerte wie folgt argumentieren: Projekt 1 ist besser, da es dieselbe Anfangsinvestition wie Projekt 2 benötigt und nach zwei Jahren 60′000 CHF generiert, 50′000 CHF jedoch schon während des ersten Jahres. Demnach ist der Gesamtbetrag, den das Projekt 1 innerhalb der zwei Jahre generiert, strikt grösser als 110′000 CHF, gegeben, dass der Zinssatz echt positiv ist.

Aufgabe 3

Frage 5 (3 Punkte)

Ein Finanzberater schlägt seinem Kunden zwei Optionen für die Rückzahlung eines Hypothekenkredites vor: Option 1 sieht die Rückzahlung des Kredites mit konstanten Zahlungen C^D vor, welche über n^D Jahre am Jahresanfang erfolgen. Bei Option 2 dagegen wird derselbe Kredit mit konstanten Zahlungen C^I am Jahresende über n^I Jahre zurückgezahlt.

Unter der Voraussetzung, dass der Zinssatz strikt positiv ist, folgt:

(a) $C^I = C^D$, wenn $n^I = n^D$.

(b) $C^I > C^D$, wenn $n^I = n^D$.

(c) $C^I < C^D$, wenn $n^I = n^D$.

(d) $C^I < C^D$ genau dann, wenn $n^I > n^D$.

Lösung:

Antwort (b). Gilt $n^I = n^D$ und ist der Zinssatz strikt positiv, dann sind die Zinserträge bei Zahlungen am Anfang des Jahres echt grösser als die Zinserträge bei Zahlungen am Ende des Jahres. Der Grund ist einfach der, dass bei Zahlungen am Anfang des Jahres für ein zusätzliches Jahr Zinserträge generiert werden, im Vergleich zu Zahlungen am Ende des Jahres. Der Kunde muss bei Zahlungen zu Beginn des Jahres weniger bezahlen, da er von den höheren Zinserträgen profitiert. Laufen die Zahlungen am Ende des Jahres länger (d.h., $n^I > n^D$), dann gilt im Allgemeinen nicht, dass die jährlichen Zahlungen C^I kleiner sind als die jährlichen Zahlungen C^D. Um beispielsweise einen Kredit in Höhe von $1'000'000$ CHF bei einem Zinssatz von $i = 5\%$ über 20 Jahre zurückzuzahlen, müssen die konstanten Zahlungen am Anfang des Jahres $C^D = 76'421.50$ CHF betragen. Um denselben Betrag über 21 Jahre mittels konstanter Zahlungen am Ende des Jahres zu tilgen, müssen diese $C^I = 77'996.10$ CHF betragen. Folglich gilt $C^I > C^D$, obwohl $n^I > n^D$.

Aufgabe 3

Frage 6 (3 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto y=\begin{cases}\frac{\sin(x)}{a\,(x-\pi)} & \text{für } x\neq\pi\\ a & \text{für } x=\pi\end{cases}.$$

Für welches $a\in\mathbb{R}$ ist f überall stetig?

(a) $a=1$.

(b) $a=-1$.

(c) $a\in\{-1,1\}$.

(d) f ist für kein $a\in\mathbb{R}$ überall stetig.

Lösung:

Antwort (d). Offensichtlich ist f stetig für $x\neq\pi$. Ausserdem gilt:

$$\lim_{x\to\pi} f(x)=\lim_{x\to\pi}\frac{\sin(x)}{a\,(x-\pi)}\overset{\text{de l'Hôpital}}{=}\lim_{x\to\pi}\frac{\cos(x)}{a}=-\frac{1}{a}.$$

Demnach ist f stetig in $x=\pi$ genau dann, wenn $-\frac{1}{a}=a$, d.h., $a^2=-1$. Diese Gleichung hat in $\mathbb{R}$ keine Lösung.

Aufgabe 3

Frage 7 (3 Punkte)

Sei $f(x) = 1 + 3\,x - 4\,x^4$ und P_4 das Taylorpolynom vierter Ordnung von f in $x_0 = 1$. Welche der folgenden Aussagen über das Restglied vierter Ordnung R_4 in $x_0 = 1$ ist wahr?

(a) $R_4(x) > 0$ für alle x.

(b) $R_4(x) < 0$ für alle x.

(c) $R_4(x) = 0$ für alle x.

(d) Jeder der Fälle $R_4(x) > 0$, $R_4(x) < 0$ und $R_4(x) = 0$ ist für entsprechende $x \in \mathbb{R}$ möglich.

Lösung:

Antwort (c). Das Restglied $R_4(x)$ in $x_0 = 1$ ist gleich Null für alle x, da f bereits eine Polynomfunktion vom Grad 4 ist. Aus diesem Grund stimmen f und P_4 überein. Wir können auch den Satz von Taylor bemühen: es gibt ein ξ so, dass

$$R_4(x) = \frac{f^{(5)}(\xi)}{5!}\,(x-1)^5.$$

Da für alle möglichen Werte von ξ gilt, dass $f^{(5)}(\xi) = 0$, erhalten wir $R_4(x) = 0$.

Aufgabe 3

Frage 8 (3 Punkte)

Für eine Funktion f ist die Elastizität $\varepsilon_f(x)$ gegeben durch:

$$\varepsilon_f(x) = x\,\ln(x) + e^{3\,x}.$$

Sei g die Funktion definiert durch $g(x) = f(a\,x)$ für $a > 0$.

Dann gilt:

(a) $\varepsilon_g(x) = x\,\ln(x) + e^{3\,x}$.

(b) $\varepsilon_g(x) = a\,x\,\ln(x) + a\,e^{3\,x}$.

(c) $\varepsilon_g(x) = \frac{x}{a}\,\ln(x) + \frac{e^{3\,x}}{a}$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Lösung:

Antwort (d). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_g(x) &= x\,\frac{g'(x)}{g(x)} \\
&= x\,\frac{f'(a\,x)\,a}{f(a\,x)} \\
&= (a\,x)\,\frac{f'(a\,x)}{f(a\,x)} \\
&= \varepsilon_f(a\,x) \\
&= a\,x\,\ln(a\,x) + e^{3\,a\,x}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}^2_{++}\to\mathbb{R}_{++},\quad (x,y)\mapsto f(x,y)=(x^2+2\,x\,y+y^2)\,e^{x+y}.$$

Ihre partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}(x,y)$ und $\varepsilon_{f,y}(x,y)$ genügen der Ungleichung

(a) $\varepsilon_{f,x}>\varepsilon_{f,y}$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2_{++}$.

(b) $\varepsilon_{f,x}<\varepsilon_{f,y}$ für alle $(x,y)\in\mathbb{R}^2_{++}$.

(c) $\varepsilon_{f,x}<\varepsilon_{f,y}$ für $(x,y)\in\mathbb{R}^2_{++}$ mit $x>y$.

(d) $\varepsilon_{f,x}<\varepsilon_{f,y}$ für $(x,y)\in\mathbb{R}^2_{++}$ mit $x<y$.

Lösung:

Antwort (d). Zunächst gilt

$$f(x,y)=(x+y)^2e^{x+y}$$

und

$$f_x(x,y)=\left[2\,(x+y)+(x+y)^2\right]\,e^{x+y}=f_y(x,y).$$

Folglich:

$$\begin{aligned}
&\varepsilon_{f,x}(x,y)<\varepsilon_{f,y}(x,y)\\
&\quad\Leftrightarrow\quad x\,\frac{f_x(x,y)}{f(x,y)}<y\,\frac{f_y(x,y)}{f(x,y)}\\
&\quad\overset{f(x,y)>0}{\Leftrightarrow}\quad x\,f_x(x,y)<y\,f_y(x,y)\\
&\quad\Leftrightarrow\quad x\,\left[2\,(x+y)+(x+y)^2\right]\,e^{x+y}<y\,\left[2\,(x+y)+(x+y)^2\right]\,e^{x+y}\\
&\quad\overset{x,y>0}{\Leftrightarrow}\quad x<y.
\end{aligned}$$

Folglich ist Antwort (d) richtig.

Aufgabe 4

Frage 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_{++}, \quad x \mapsto f(x) = x^2\, e^{x^2} + 1.$$

(a) f hat ein lokales Maximum in $x_0 = 0$.

(b) f hat ein lokales Minimum in $x_0 = 0$.

(c) f hat einen Wendepunkt in $x_0 = 0$.

(d) f hat keine stationären Punkte.

Lösung:

Antwort (b). Da f differenzierbar ist, gilt für einen stationären Punkt, dass $f'(x) = 0$. Wir berechnen:

$$f'(x) = 2\,x\,e^{x^2} + x^2\,e^{x^2}\,(2\,x) = 2\,x\,e^{x^2}\,(1 + x^2).$$

Folglich gilt $f'(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, d.h., $x = 0$ ist ein stationärer Punkt von f und (d) ist falsch. Die zweite Ableitung ist gegeben durch

$$f''(x) = (2 + 6\,x^2)\,e^{x^2} + (2\,x + 2\,x^3)\,e^{x^2}\,(2\,x) = 2\,e^{x^2}\,(1 + 5\,x^2 + 2\,x^4).$$

Demnach gilt

$$f''(0) = 2 > 0,$$

und $x = 0$ ist ein Minimum.

Aufgabe 4

Frage 3 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R},\, x \mapsto f(x) = \frac{1}{1+x}.$$

P_3 und P_4 seien die Taylorpolynome dritter und vierter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Dann gilt:

(a) $P_3(x) > P_4(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(b) $P_3(x) < P_4(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(c) $P_3(x) = P_4(x)$ für alle $x \in D_f \setminus \{x_0\}$.

(d) Jeder der Fälle $P_3(x) > P_4(x)$, $P_3(x) < P_4(x)$ oder $P_3(x) = P_4(x)$ ist für entsprechende $x \in D_f \setminus \{x_0\}$ möglich.

Lösung:

Antwort (b). Wegen

$$P_4(x) = P_3(x) + \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\, x^4,$$

folgt

$$P_3(x) < P_4(x) \Leftrightarrow \frac{f^{(4)}(0)}{4!}\, x^4 > 0 \Leftrightarrow f^{(4)}(0) > 0.$$

Es gilt:

$$f'(x) = \frac{-1}{(1+x)^2}\,, \qquad f''(x) = \frac{2}{(1+x)^3}$$
$$f'''(x) = \frac{-6}{(1+x)^4}\,, \qquad f^{(4)}(x) = \frac{24}{(1+x)^5}$$

Also ist $f^{(4)}(0) = 24 > 0$ und es folgt, dass $P_3(x) < P_4(x)$.

Aufgabe 4

Frage 4 (4 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \sqrt{1 - 4\,x^2 - y^2}$$

und

$$g(x,y) = \ln\left(2\,x - x^2 - y^2 + 8\right)$$

mit den entsprechenden Definitionsgebieten D_f und D_g.

Dann gilt:

(a) $D_f \subseteq D_g$.

(b) $D_g \subseteq D_f$.

(c) $D_f = D_g$.

(d) $D_f \cap D_g = \emptyset$.

Lösung:

Antwort (a). Für die Funktion f gilt:

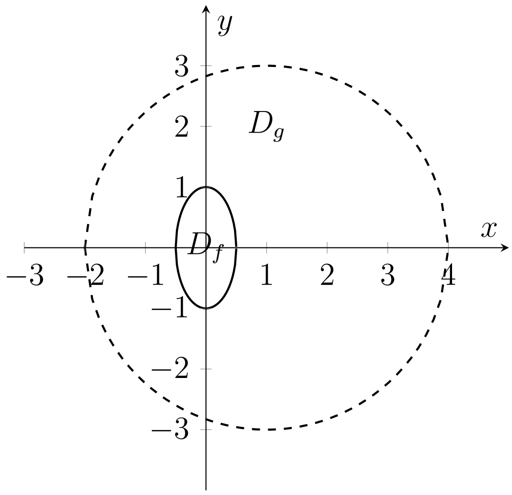
$$(x,y) \in D_f \Leftrightarrow 1 - 4\,x^2 - y^2 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{x^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{y^2}{1} \leq 1.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a = \frac{1}{2}$ und $b = 1$.

Für die Funktion g gilt:

$$(x,y) \in D_g \Leftrightarrow 2\,x - x^2 - y^2 + 8 > 0 \Leftrightarrow x^2 - 2\,x + 1 + y^2 < 9 \Leftrightarrow (x-1)^2 + y^2 < 3^2.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt $(1,0)$ und Radius 3.



Aufgabe 4

Frage 5 (3 Punkte)

Sei $f(x) = \sin(x)$ und P_3 das Taylorpolynom dritter Ordnung von f in $x_0 = 0$.

Welche der folgenden Aussagen bezüglich des Restgliedes dritter Ordnung R_3 von f in $x_0 = 0$ ist wahr?

(a) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{128}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{64}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(c) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{32}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(d) $|R_3(x)| \leq \frac{|x|^4}{16}$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Lösung:

Antwort (d). Der Satz von Taylor besagt, dass

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\, x^4.$$

Wegen $f^{(4)}(x) = \sin(x)$ gilt, dass $|f^{(4)}(\xi)| \leq 1$ für alle ξ und

$$|R_3(x)| = \frac{|f^{(4)}(\xi)|}{4!}\, |x|^4 \leq \frac{|x|^4}{24} \leq \frac{|x|^4}{16}.$$

Bemerkung: Logisches Schlussfolgern zeigt, dass nur (d) wahr sein kann. Dies gilt aufgrund der Tatsache, dass nur eine Antwort richtig ist. Wäre (a) wahr, dann gälte dies auch für (b), (c) und (d). Ähnlich folgt, dass wenn (b) wahr wäre, auch (c) und (d) wahr wären. Nicht zuletzt folgt aus der Wahrheit von (c) die von (d). Demnach kann nur (d) die richtige Antwort sein.

Aufgabe 4

Frage 6 (2 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5\,y}\right)^{-0.5} + \sqrt{3\,x} + \sqrt{y} \quad (x > 0,\, y > 0).$$

(a) f ist linear homogen.

(b) f ist homogen vom Grad -0.5.

(c) f ist homogen vom Grad 0.5.

(d) f ist nicht homogen.

Lösung:

Antwort (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= 8\left(\frac{1}{\lambda\,x} + \frac{1}{5\,\lambda\,y}\right)^{-0.5} + \sqrt{3\,\lambda\,x} + \sqrt{\lambda\,y} \\ &= 8\left[\frac{1}{\lambda}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5\,y}\right)\right]^{-0.5} + \lambda^{0.5}\sqrt{3\,x} + \lambda^{0.5}\sqrt{y} \\ &= 8\,\lambda^{0.5}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5\,y}\right)^{-0.5} + \lambda^{0.5}\sqrt{3\,x} + \lambda^{0.5}\sqrt{y} \\ &= \lambda^{0.5}\left[8\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{5\,y}\right)^{-0.5} + \sqrt{3\,x} + \sqrt{y}\right] \\ &= \lambda^{0.5}\,f(x,y). \end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f homogen vom Grad 0.5 ist.

Aufgabe 4

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben sind die Funktionen

$$f(x,y) = \frac{x^2}{y} + 1 + \sqrt{x^2 + 5\,y^2} \quad (x > 0,\ y > 0)$$

und

$$g(x,y) = f(a\,x, a\,y),$$

wobei $a > 0$.

(a) g ist linear homogen.

(b) g ist homogen vom Grad a.

(c) g ist homogen vom Grad $2\,a$.

(d) g ist nicht homogen.

Lösung:

Antwort (d). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= \left(\frac{(\lambda\,x)^2}{\lambda\,y} + 1\right) + \sqrt{(\lambda\,x)^2 + 5\,(\lambda\,y)^2} \\
&= \left(\frac{\lambda^2\,x^2}{\lambda\,y} + 1\right) + \sqrt{\lambda^2\,x^2 + 5\,\lambda^2\,y^2} \\
&= \left(\lambda\,\frac{x^2}{y} + 1\right) + \lambda\,\sqrt{x^2 + 5\,y^2} \\
&= \lambda\,\left(\frac{x^2}{y} + 1 + \sqrt{x^2 + 5\,y^2}\right) - \lambda + 1 \\
&= \lambda\,f(x,y) - \lambda + 1
\end{aligned}$$

Es folgt:

$$g(\lambda\,x, \lambda\,y) = f(a\,\lambda\,x, a\,\lambda\,y) = f(\lambda\,a\,x, \lambda\,a\,y) = \lambda\,f(a\,x, a\,y) - \lambda + 1 = \lambda\,g(x,y) - \lambda + 1.$$

Daher ist g nicht homogen.

Aufgabe 4

Frage 8 (3 Punkte)

Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = x^{a+1}\,\sqrt{y^{4\,a+4}} + (x\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}} \qquad (x>0,\ y>0),$$

wobei $a \in \mathbb{R}$, mit partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,x}$ und $\varepsilon_{f,y}$.

Für welchen Wert von a gilt

$$\varepsilon_{f,x} + \varepsilon_{f,y} = 3\,?$$

(a) $a = 0$.

(b) $a = 1$.

(c) $a = 2$.

(d) $a = 3$.

Lösung:

Antwort (a). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned} f(\lambda\,x, \lambda\,y) &= (\lambda\,x)^{a+1}\,\sqrt{(\lambda\,y)^{4\,a+4}} + (\lambda\,x\,\lambda\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}} \\ &= \lambda^{a+1}\,x^{a+1}\,\lambda^{\frac{4\,a+4}{2}}\,\sqrt{y^{4\,a+4}} + \lambda^{3\,a+3}\,(x\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}} \\ &= \lambda^{a+1}\,x^{a+1}\,\lambda^{2\,a+2}\,\sqrt{y^{4\,a+4}} + \lambda^{3\,a+3}\,(x\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}} \\ &= \lambda^{3\,a+3}\left[x^{a+1}\,\sqrt{y^{4\,a+4}} + (x\,y)^{\frac{3\,a+3}{2}}\right]. \end{aligned}$$

Also ist f homogen vom Grad $3\,a+3$ und aus der Eulerschen Relation folgt:

$$\varepsilon_{f,x} + \varepsilon_{f,y} = 3\,a + 3.$$

Demnach gilt:

$$\varepsilon_{f,x} + \varepsilon_{f,y} = 3 \Leftrightarrow a = 0.$$

Prüfungen Assessment-Stufe: Herbstsemester 2017

1,200 Mathematik A

Antwortbogen Multiple-Choice-Fragen

Aufgabe 3 (24 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☒	☐
2.	☐	☐	☐	☒
3.	☐	☒	☐	☐
4.	☒	☐	☐	☐
5.	☐	☒	☐	☐
6.	☐	☐	☐	☒
7.	☐	☐	☒	☐
8.	☐	☐	☐	☒

Aufgabe 4 (26 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☒
2.	☐	☒	☐	☐
3.	☐	☒	☐	☐
4.	☒	☐	☐	☐
5.	☐	☐	☐	☒
6.	☐	☐	☒	☐
7.	☐	☐	☐	☒
8.	☒	☐	☐	☐