Mathematik B
Prüfung Frühjahrssemester 2017

Dr. Reto Schuppli*

26. Juni 2017

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (25 Punkte)

(a) (7 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion zweier Variablen definiert durch

$$f(x, y) = (x + y + a)\, e^x - e^y, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R}.$$

Untersuchen Sie die Funktion f auf stationäre Punkte und bestimmen Sie gegebenfalls, ob ein Maximum, ein Minimum oder ein Sattelpunkt vorliegt.

Aufgabe 1

(a) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(b) (7 Punkte)

Die Funktion

$$f(x,y) = x^2 + y^2$$

ist unter der Nebenbedingung

$$\varphi(x,y) = a\,x^2 + b\,x\,y + 5\,y^2 - 16 = 0$$

zu optimieren.
Bestimmen Sie die Parameter $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \mathbb{R}$ so, dass in $(1,1)$ eine mögliche Extremstelle sein könnte.

Bemerkung:
Eine Abklärung, ob es sich um eine Extremstelle handelt und von welcher Art die Extremstelle ist (Maximum oder Minimum), wird nicht verlangt.

Aufgabe 1

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(c) (5 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_0^{\sqrt{0.5\,\pi}} x\,\sin(x^2)\,\big(\cos(x^2)\big)^3\,dx.$$

Aufgabe 1

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(d) (6 Punkte)

Berechnen Sie

$$\int_0^e |\ln(x)|\,dx.$$

Bemerkung: Sie dürfen das in Mathematik A bewiesene Resultat, dass gilt:

$$\lim_{x\searrow 0} x\,\ln(x) = 0,$$

voraussetzen.

Aufgabe 1

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2 (25 Punkte)

(a) (4 Punkte)

Die quadratischen $n \times n$ Matrizen A und B seien regulär, A sei ausserdem symmetrisch.

Beweisen Sie:

$$B^T\,(AB)^T\,(B^{-1}A^{-1})^T\,B\,(AB)^{-1} = (A^{-1}B)^T.$$

Aufgabe 2

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = a\,\ln(x-2) + x\,y^2 + 8\,y, \quad \text{wobei } a \in \mathbb{R}.$$

Berechnen Sie den Gradienten von f an der Stelle $(x_0, y_0) = (8,2)$.

Wie muss der Parameter $a \in \mathbb{R}$ gewählt werden, damit die Funktion f im Punkt $(x_0, y_0) = (8,2)$ in der Richtung $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ am stärksten zunimmt?

Aufgabe 2

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(c) (3 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{b_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ 0 \end{pmatrix}, \ \mathbf{b_2} = \begin{pmatrix} 2t \\ 4 \\ t \end{pmatrix}, \ \mathbf{b_3} = \begin{pmatrix} 8 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}.$$

Für welche Werte von $t \in \mathbb{R}$ ist das Vektorsystem $\{\mathbf{b_1}, \mathbf{b_2}, \mathbf{b_3}\}$ *keine* Basis des dreidimensinalen Raumes $\mathbb{R}^3$?

Aufgabe 2

(d) (6 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 2a \\ -3a & 5a \end{pmatrix}, \text{ where } a \neq 0.$$

Berechnen Sie die Eigenwerte und Eigenvektoren der Matrix M.

Berechnen Sie den Vektor $M^n \mathbf{x}$, wobei $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Aufgabe 2

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(e) (8 Punkte)

Gegeben ist das Gleichungssystem

$$\begin{array}{rcrcrcrcrcl} x_1 & + & x_2 & + & x_3 & + & x_4 & + & x_5 & = & 0 \\ 2x_1 & + & 3x_2 & + & 4x_3 & + & 5x_4 & - & x_5 & = & 0 \\ x_1 & + & 2x_2 & + & 4x_3 & - & x_4 & + & 2x_5 & = & 0 \end{array}.$$

Berechnen Sie die allgemeine Lösung dieses Gleichungssystems mit dem Gauß-Verfahren.

Für den Unterraum

$W = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^5 \,|\, x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 = 0 \wedge 2x_1+3x_2+4x_3+5x_4-x_5 = 0 \wedge x_1+2x_2+4x_3-x_4+2x_5 = 0\}$

ist eine Basis anzugeben.

Aufgabe 2

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Die Funktion $f(x, y) = y$ hat unter der Nebenbedingung $\varphi(x, y) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ ihr Minimum in

(a) $P = (-5, 0)$.

(b) $P = (0, 3)$.

(c) $P = (0, 0)$.

(d) $P = (0, -3)$.

Aufgabe 3

Frage 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x) = \begin{cases} ax + \frac{1}{8} & \text{für } 0 \leq x \leq 4 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} .$$

(a) f ist für alle $a \in \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion.

(b) f ist nur für $a = \frac{1}{16}$ eine Dichtefunktion.

(c) f ist nur für $a = -\frac{1}{16}$ eine Dichtefunktion.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ eine Dichtefunktion.

Aufgabe 3

Frage 3 (2 Punkte)

Sei $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine beliebige, auf dem Intervall $[a, b]$ definierte Funktion.

Welche der folgenden Aussagen ist *richtig*?

(a) Wenn das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ existiert, dann ist f stetig auf $[a, b]$.

(b) Wenn f nicht stetig ist auf $[a, b]$, dann existiert das bestimmt Integral von f über $[a, b]$ nicht.

(c) Wenn f differenzierbar ist auf $[a, b]$, dann existiert das bestimmt Integral von f über $[a, b]$.

(d) Das bestimmte Integral von f über $[a, b]$ existiert immer.

Aufgabe 3

Frage 4 (2 Punkte)

A und B seien quadratische Matrizen mit $\det(A) = 5$ und $\det(B) = 2$; die Matrix C ist definiert durch $C = A^{-1} B A$.

(a) Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\det(C^n) = 1$.

(b) Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\det(C^n) = 2^n$.

(c) Dann gilt für jedes $n \in \mathbb{N}$: $\det(C^n) = 2^n \cdot 5^n$.

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Aufgabe 3

Frage 5 (4 Punkte)

Gegeben sind die Vektoren

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \mathbf{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \mathbf{c} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \mathbf{d} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}.$$

(a) Es ist nur für $t = 6$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(b) Es ist nur für $t = 6$ und $t = 0$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(c) Es ist für alle $t \in \mathbb{R}$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

(d) Es ist für kein $t \in \mathbb{R}$ möglich, $\mathbf{d}$ als Linearkombination von $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$ zu schreiben.

Aufgabe 3

Frage 6 (2 Punkte)

A ist eine 6×5 Matrix, das lineare Gleichungssystem $A\,\mathbf{x} = \mathbf{b}$ hat unendlich viele Lösungen und der Lösungsraum hat die Dimension 2. Dann gilt:

(a) $rg(A) = rg(A; \mathbf{b}) = 3.$

(b) $rg(A) = rg(A; \mathbf{b}) = 4.$

(c) $rg(A) < rg(A; \mathbf{b}) = 4.$

(d) Keine der obigen Aussagen ist korrekt.

Aufgabe 3

Frage 7 (4 Punkte)

Das unbestimmte Integral von

$$\int \ln(x\, e^x)\, dx\,,\ (x > 0)$$

ist

(a) $x\ \ln(x) + x^2 - x + C$.

(b) $x\ \ln(x) + \frac{x^2}{2} - x + C$.

(c) $x\ \ln(x) + x^2 + C$.

(d) Keine der obigen Antworten ist korrekt.

Aufgabe 3

Frage 8 (4 Punkte)

Gegeben ist die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ a & 2 \end{pmatrix}, \text{ wobei } a \neq 0.$$

(a) Die Matrix hat für alle $a \neq 0$ in $\mathbb{R}$ zwei verschiedene relle Eigenwerte.

(b) Die Matrix hat für alle $a \neq 0$ in $\mathbb{R}$ genau einen rellen Eigenwert.

(c) Die Matrix hat für alle $a \neq 0$ in $\mathbb{R}$ keinen rellen Eigenwert.

(d) Die Matrix A hat abhängig von $a \neq 0$ keinen, einen oder zwei reelle Eigenwerte.

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Das bestimmte Integral

$$\int_0^{\pi} 2\,\sin(x)\,\cos(x)\,dx$$

hat den Wert

(a) 0.

(b) 1.

(c) 2.

(d) Keines der obigen Resultate ist korrekt.

Aufgabe 4

Frage 2 (3 Punkte)

Für welchen Wert von $t \in \mathbb{R}$ sind die Vektoren $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} t-2 \\ t \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 1 \\ t-1 \\ 9 \end{pmatrix}$ orthogonal?

(a) $t = 5$.

(b) $t = 5$ oder $t = -5$.

(c) $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind für kein $t \in \mathbb{R}$ orthogonal.

(d) $\mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$ sind für alle $t \in \mathbb{R}$ orthogonal.

Aufgabe 4

Frage 3 (4 Punkte)

Die 4×5 Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -7 & 13 & -10 \\ -1 & 3 & 5 & -7 & 4 \\ -2 & 10 & 18 & -22 & 10 \end{pmatrix}$$

(a) hat Rang 2.

(b) hat Rang 3.

(c) hat Rang 4.

(d) hat Rang 5.

Aufgabe 4

Frage 4 (4 Punkte)

Gesucht ist eine Matrix X, sodass

$$X \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$.

(b) $X = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$.

(c) $X = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$.

(d) Es gibt keine Matrix X, die die Gleichung erfüllt.

Aufgabe 4

Frage 5 (2 Punkte)

Die $n \times n$ Matrix A habe die Eigenwerte λ_1, λ_2, ..., λ_n. Dann hat die Matrix A^2

(a) die gleichen Eigenwerte.

(b) die Eigenwerte $2\lambda_1$, $2\lambda_2$, ..., $2\lambda_n$.

(c) die Eigenwerte λ_1^2, λ_2^2, ..., λ_n^2.

(d) Keine der vorangehenden Antworten ist richtig.

Aufgabe 4

Frage 6 (3 Punkte)

Das Anfangswertproblem

$$
\begin{aligned}
&y_{k+1} - (1+a)\, y_k = a, \text{ wobei } a \neq -1,\ a \neq 0,\\
&y_0 = 2
\end{aligned}
$$

hat die Lösung

(a) $y_k = 2\,(1+a)^k$.

(b) $y_k = 3\,(1+a)^k - 1$.

(c) $y_k = 4\,(1+a)^k - 1$.

(d) $y_k = 5\,(1+a)^k - 2$.

Aufgabe 4

Frage 7 (2 Punkte)

Die allgemeine Lösung der linearen Differenzengleichung

$$3\,(y_k - y_{k+1}) + 3 = 2\,y_k - 12$$

ist

(a) oszillierend und konvergent.

(b) oszillierend und divergent.

(c) monoton und konvergent.

(d) monoton und divergent.

Aufgabe 4

Frage 8 (4 Punkte)

Die allgemeine Lösung der Differenzengleichung

$$(2+c)\, y_{k+1} + (1-c)\, y_k = 5,$$

wobei $c \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ ist, ist genau dann monoton und divergent, wenn

(a) $c < -2$.

(b) $c \in (-2, 0)$.

(c) $c < -\frac{1}{2}$.

(d) Die allgemeine Lösung der obigen Differenzengleichung ist für kein $c \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$ monoton und divergent.

Prüfungen Assessment-Stufe: Herbstsemester 2016

1'200 Mathematik B

Antwortbogen Multiple-Choice-Fragen

Aufgabe 3 (25 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐

Prüfungen Assessment-Stufe: Herbstsemester 2016

1’200 Mathematik B

Aufgabe 4 (25 Punkte)

Frage 1: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☐	☐

Frage 2: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
2.	☐	☐	☐	☐

Frage 3: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
3.	☐	☐	☐	☐

Frage 4: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
4.	☐	☐	☐	☐

Frage 5: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
5.	☐	☐	☐	☐

Frage 6: Single-Choice (3 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
6.	☐	☐	☐	☐

Frage 7: Single-Choice (2 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
7.	☐	☐	☐	☐

Frage 8: Single-Choice (4 Punkte)

	(a)	(b)	(c)	(d)
8.	☐	☐	☐	☐