Mathematik B
Musterlösung Prüfung Frühjahrssemester 2017

Prof. Dr. Enrico De Giorgi*

26. Juni 2017

*Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (7 Punkte)

Die notwendigen Bedingungen für Maxima, Minima oder Sattelpunkte (x_0, y_0) von f sind

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases}.$$

Wir berechnen daher die partiellen Ableitungen erster Ordnung von f und erhalten

$$\begin{aligned} f_x(x, y) &= e^x + (x + y + a)\, e^x = (x + y + a + 1)\, e^x, \\ f_y(x, y) &= e^x - e^y. \end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{cases} f_x(x_0, y_0) = 0 \\ f_y(x_0, y_0) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x_0 + y_0 + a + 1)\, e^{x_0} = 0 \\ e^{x_0} - e^{y_0} = 0 \end{cases}.$$

Aus $e^{x_0} - e^{y_0} = 0$ erhalten wir

$$y_0 = x_0.$$

Wir setzen dieses Resultat in $(x_0 + y_0 + a + 1)\, e^{x_0} = 0$ ein und erhalten (unter Ausnützung von $e^{x_0} \neq 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$)

$$\begin{aligned} x_0 + y_0 + a + 1 = 0 \quad &\overset{x_0 = y_0}{\Leftrightarrow} \quad 2\, x_0 + a + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \quad x_0 = -\frac{a+1}{2}. \end{aligned}$$

Mit $y_0 = x_0$ erhalten wir folgenden, eindeutigen stationären Punkt von f:

$$P = \left(-\frac{a+1}{2}, -\frac{a+1}{2} \right).$$

Als Nächstes überprüfen wir die hinreichenden Bedingungen. Falls (x_0, y_0) die notwendigen Bedingungen erfüllt, gilt Folgendes:

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) > 0 \\ f_{yy}(x_0, y_0) > 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Minimum},$$

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0, y_0) < 0 \\ f_{yy}(x_0, y_0) < 0 \\ f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 > 0 \end{cases} \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Maximum},$$

und

$$f_{xx}(x_0, y_0)\, f_{yy}(x_0, y_0) - (f_{xy}(x_0, y_0))^2 < 0 \Rightarrow (x_0, y_0) \text{ ist ein Sattelpunkt}.$$

Für die hinreichenden Bedingungen benötigen wir die partiellen Ableitungen zweiter Ordnung von f. Es gilt:

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= e^x + (x+y+a+1)\,e^x = (x+y+a+2)\,e^x, \\ f_{yy}(x,y) &= -e^y, \\ f_{xy}(x,y) &= e^x. \end{aligned}$$

Es folgt für $x_0 = y_0 = -\frac{a+1}{2}$:

$$\begin{cases} f_{xx}(x_0,y_0) = e^{x_0} > 0 \\ f_{yy}(x_0,y_0) = -e^{y_0} = -e^{x_0} < 0 \\ f_{xx}(x_0,y_0)\, f_{yy}(x_0,y_0) - (f_{xy}(x_0,y_0))^2 = e^{x_0}\,\left(-e^{x_0}\right) - \left(e^{x_0}\right)^2 = -2\,e^{2\,x_0} < 0 \end{cases}$$

Damit ist $P = \left(-\frac{a+1}{2}, -\frac{a+1}{2}\right)$ ein Sattelpunkt von f.

(b) (7 Punkte)

Wir verwenden die Lagrange Methode und definieren zunächst die Lagrange-Funktion:

$$\begin{aligned} F(x,y,\lambda) &= f(x,y) + \lambda\,\varphi(x,y) \\ &= x^2 + y^2 + \lambda\,(a\,x^2 + b\,x\,y + 5\,y^2 - 16). \end{aligned}$$

Die notwendigen Bedingungen für Extremalstellen von f unter der Nebenbedingung $\varphi(x,y) = 0$ sind die sogenannten Lagrange-Bedingungen:

$$\begin{aligned} F_x(x,y,\lambda) = 0 &\Rightarrow 2\,x + \lambda\,(2\,a\,x + b\,x) = 0, && \text{(I)} \\ F_y(x,y,\lambda) = 0 &\Rightarrow 2\,y + \lambda\,(b\,x + 10\,y) = 0, && \text{(II)} \\ F_\lambda(x,y,\lambda) = 0 &\Rightarrow a\,x^2 + b\,x\,y + 5\,y^2 - 16 = 0. && \text{(III)} \end{aligned}$$

Soll nun $(x,y) = (1,1)$ ein Extremum unter Nebenbedingung von f sein, muss folglich gelten:

$$\begin{aligned} F_x(1,1,\lambda) = 0 &\Rightarrow 2 + \lambda\,(2\,a + b) = 0, && \text{(IV)} \\ F_y(1,1,\lambda) = 0 &\Rightarrow 2 + \lambda\,(b + 10) = 0, && \text{(V)} \\ F_\lambda(1,1,\lambda) = 0 &\Rightarrow a + b - 11 = 0. && \text{(VI)} \end{aligned}$$

Aus (IV) bzw. (V) erhalten wir

$$\lambda = -\frac{2}{2\,a + b} \quad \text{bzw.} \quad \lambda = -\frac{2}{b + 10}. \tag{VII}$$

Aus den Gleichungen in (VII) folgt, dass

$$-\frac{2}{2\,a + b} = \lambda = -\frac{2}{b + 10} \Leftrightarrow 2\,a + b = b + 10 \Leftrightarrow 2\,a = 10 \Leftrightarrow a = 5.$$

Wir setzen dieses Ergebnis in (VI) ein und erhalten:

$$5 + b - 11 = 0 \Leftrightarrow b = 6.$$

(c) (5 Punkte)

Wir berechnen das Integral mit Hilfe der Substitutionsmethode. Sei

$$u = \cos(x^2).$$

Damit folgt

$$\frac{du}{dx} = -2\,x\,\sin(x^2) \quad \Leftrightarrow \quad -\frac{1}{2}\,du = x\,\sin(x^2)\,dx.$$

Wir erhalten:

$$\int x\,\sin(x^2)\,(\cos(x^2))^3\,dx = \int -\frac{1}{2}\,u^3\,du = -\frac{1}{8}\,u^4 + C = -\frac{1}{8}\,(\cos(x^2))^4 + C, \quad C \in \mathbb{R}.$$

Damit gilt:

$$\int_0^{\sqrt{0.5\,\pi}} x\,\sin(x^2)\,(\cos(x^2))^3\,dx = \left[-\frac{1}{8}\,(\cos(x^2))^4\right]_0^{\sqrt{0.5\,\pi}} = 0 - \left(-\frac{1}{8}\right) = \frac{1}{8}.$$

(d) (6 Punkte)

Es gilt:

$$\int_0^e |\ln(x)|\,dx = \int_0^1 |\ln(x)|\,dx + \int_1^e |\ln(x)|\,dx \overset{\ln(x)<0 \Leftrightarrow 0<x<1}{=} \underbrace{\int_0^1 (-\ln(x))\,dx}_{\text{uneigentliches Integral}} + \int_1^e \ln(x)\,dx.$$

Wir lösen zunächst das unbestimmte Integral $\int \ln(x)\,dx$ mittels partieller Integration. Sei $u(x) = \ln(x)$ und $v'(x) = 1$, dann gilt:

$$\int \ln(x)\,dx = \int \underbrace{1}_{=v'(x)} \cdot \underbrace{\ln(x)}_{=u(x)}\,dx = \underbrace{x}_{=v(x)}\,\underbrace{\ln(x)}_{=u(x)} - \int \underbrace{x}_{=v(x)}\,\underbrace{\frac{1}{x}}_{=u'(x)}\,dx = x\,\ln(x) - \int 1\,dx = x\,\ln(x) - x + C.$$

Wir erhalten:

$$\int_1^e \ln(x)\,dx = [x\,(\ln(x)-1)]_1^e = 0 - (-1) = 1$$

und

$$\int_0^1 (-\ln(x))\,dx = \lim_{a \searrow 0} \int_a^1 (-\ln(x))\,dx = -\lim_{a \searrow 0} [x\,(\ln(x)-1)]_a^1 = 1 + \lim_{a \searrow 0} (a\,\ln(a) - a) = 1.$$

Addieren der beiden Integrale liefert:

$$\int_0^e |\ln(x)|\,dx = 2.$$

Aufgabe 2

(a) (4 Punkte)

Es gelten folgende Eigenschaften:

(i) $(A\,B)^T = B^T\,A^T$;

(ii) $(A\,B)^{-1} = B^{-1}\,A^{-1}$;

(iii) $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$;

(iv) $A^{-1}\,A = I$;

(v) $A = A^T$ genau dann ,wenn A symmetrisch ist.

Es gilt:

$$\begin{aligned}
B^T\,(A\,B)^T\,(B^{-1}\,A^{-1})^T\,B\,(A\,B)^{-1} &= B^T(B^T\,A^T)\,((A^{-1})^T\,(B^{-1})^T)\,B\,(B^{-1}\,A^{-1}) \\
&= B^T\,B^T\,\underbrace{A^T\,(A^T)^{-1}}_{=I}\,(B^T)^{-1}\,\underbrace{B\,B^{-1}}_{=I}\,A^{-1} \\
&= B^T\,\underbrace{B^T\,(B^T)^{-1}}_{=I}\,A^{-1} \\
&= B^T\,A^{-1} \\
&\overset{A\text{ ist symmetrisch}}{=} B^T\,(A^T)^{-1} \\
&= B^T\,(A^{-1})^T \\
&= (A^{-1}\,B)^T.
\end{aligned}$$

Damit haben wir gezeigt:

$$B^T\,(A\,B)^T\,(B^{-1}\,A^{-1})^T\,B\,(A\,B)^{-1} = (A^{-1}\,B)^T.$$

(b) (4 Punkte)

Die Richtung des stärksten Anstiegs von f im Punkt $(x_0, y_0) = (8, 2)$ ist durch den Vektor

$$\mathbf{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

genau dann gegeben, wenn

$$\lambda\,\mathbf{b} = \mathbf{grad} f(8, 2)$$

für ein $\lambda > 0$ gilt.

Wir berechnen:

$$\mathbf{grad} f(x, y) = \begin{pmatrix} f_x(x, y) \\ f_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a}{x-2} + y^2 \\ 2\,x\,y + 8 \end{pmatrix}.$$

Damit folgt:

$$\mathbf{grad} f(8,2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\,a + 4 \\ 40 \end{pmatrix}.$$

Demnach erhalten wir:

$$\begin{aligned} & \lambda\,\mathbf{b} = \mathbf{grad} f(8,2) \\ \Leftrightarrow\quad & \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{6}\,a + 4 \\ 40 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Also gilt $\lambda = 10$ und

$$\frac{1}{6}\,a + 4 = 30 \Leftrightarrow a = 156.$$

(c) (3 Punkte)
Es gilt folgende Aussage: das System von Vektoren $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ ist <u>keine</u> Basis des 3-dimensionalen Raums $\mathbb{R}^3$ genau dann, wenn $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ linear abhängig ist, d.h., wenn die Matrix $[\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]$ singulär ist. Letzteres ist wiederum äquivalent zu $\det([\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]) = 0$.

Es gilt:

$$\begin{aligned} \det([\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]) &= \left| \begin{pmatrix} 1 & 2\,t & 8 \\ t & 4 & t \\ 0 & t & t^2 \end{pmatrix} \right| \\ &= 4\,t^2 + 8\,t^2 - t^2 - 2\,t^4 \\ &= 11\,t^2 - 2\,t^4 \\ &= t^2\,(11 - 2\,t^2). \end{aligned}$$

Wir erhalten:

$$\det([\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3]) = 0 \Leftrightarrow t^2\,(11 - 2\,t^2) = 0 \Leftrightarrow t \in \left\{ -\sqrt{\frac{11}{2}}, 0, \sqrt{\frac{11}{2}} \right\}.$$

Folglich ist $\{\mathbf{b}_1, \mathbf{b}_2, \mathbf{b}_3\}$ <u>keine</u> Basis des 3-dimensionalen Raums $\mathbb{R}^3$ genau dann, wenn $t \in \left\{0, \pm\sqrt{\frac{11}{2}}\right\}$.

(d) (6 Punkte)

λ ist ein Eigenwert von M genau dann, wenn $\det(M - \lambda\,I) = 0$. Es gilt:

$$\det(M - \lambda\,I) = \left| \begin{pmatrix} -\lambda & 2\,a \\ -3\,a & 5\,a - \lambda \end{pmatrix} \right| = \lambda^2 - 5\,a\,\lambda + 6\,a^2 = (\lambda - 2\,a)\,(\lambda - 3\,a)$$

und folglich

$$\det(M - \lambda\, I) = 0 \Leftrightarrow \lambda \in \{2\, a, 3\, a\}.$$

Wir berechnen nun die Eigenvektoren. Der Vektor $\mathbf{x} = (x, y)^T$ ist ein Eigenvektor von M zum Eigenwert λ genau dann, wenn $(M - \lambda\, I)\, \mathbf{x} = \mathbf{0}$.

Für $\lambda = \lambda_1 = 2\, a$ gilt:

$$\begin{pmatrix} -2\, a & 2\, a \\ -3\, a & 3\, a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -2\, a\, x + 2\, a\, y & = 0 \\ -3\, a\, x + 3\, a\, y & = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = y.$$

D.h.,

$$\mathbf{x}_1 = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sind die Eigenvektoren von M zum Eigenwert $\lambda_1 = 2\, a$.

Für $\lambda = \lambda_2 = 3\, a$ gilt:

$$\begin{pmatrix} -3\, a & 2\, a \\ -3\, a & 2\, a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow -3\, a\, x + 2\, a\, y = 0 \Leftrightarrow 3\, x = 2\, y.$$

D.h.,

$$\mathbf{x}_2 = s \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad s \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$$

sind die Eigenvektoren von M zum Eigenwert $\lambda_2 = 3\, a$.

Schliesslich erkennen wir noch, dass $\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$ für $t = 2$ dem Vektor $\mathbf{x}_1$ entspricht und folglich ein Eigenvektor von M zum Eigenwert $\lambda_1 = 2\, a$ ist. Demnach gilt:

$$M^n\, \mathbf{x} = (2\, a)^n \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2^{n+1}\, a^n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(e) (8 Punkte)

Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$(A, \mathbf{b}) \;=\; \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 4 & 5 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} \\ -2\,(I) \\ -(I) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} -(II) \\ \\ -(II) \end{array}$$

$$\rightarrow \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array} \begin{array}{l} +(III) \\ -2\,(III) \\ \end{array}$$

$$(A^\star, b^\star) = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -7 & 8 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 13 & -11 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 0 \end{array}\right) \end{array} .$$

Es folgt:

$$\begin{aligned} x_1 &= 7\,x_4 - 8\,x_5 \\ x_2 &= -13\,x_4 + 11\,x_5 \\ x_3 &= 5\,x_4 - 4\,x_5 \end{aligned}$$

und $x_4 = t$, $x_5 = s$ sind freie Variablen. Demnach ergibt sich die Lösungsmenge als:

$$W = \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; \quad t, s \in \mathbb{R} \right\} .$$

Eine Basis von W ist gegeben durch:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ -13 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -8 \\ 11 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} .$$

Teil II: Multiple-Choice-Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☐	☐	☐	☒
Frage 2	☐	☒	☐	☐
Frage 3	☐	☐	☒	☐
Frage 4	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☒	☐	☐	☐
Frage 7	☐	☒	☐	☐
Frage 8	☒	☐	☐	☐

F1. (d). Die Nebenbedingung $\varphi(x,y) = \frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$ entspricht einer Ellipse mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen 5 und 3. Der Punkt mit der kleinsten y-Koordinate ist $P = (0,-3)$.

F2. (b). Eine Funktion f ist eine Dichtefunktion auf $I \subseteq \mathbb{R}$ genau dann, wenn (i) $f(x) \geq 0$ für alle $x \in I$, und (ii) $\int_I f(x)\,dx = 1$. Aus

$$\int_0^4 f(x)\,dx = \int_0^4 \left(a\,x + \frac{1}{8}\right)\,dx = \left[\frac{a}{2}\,x^2 + \frac{1}{8}\,x\right]_0^4 = 8\,a + \frac{1}{2}$$

folgt, dass

$$\int_0^4 f(x)\,dx = 1 \Leftrightarrow 8\,a + \frac{1}{2} = 1 \Leftrightarrow a = \frac{1}{16}.$$

Ausserdem gilt mit $a = \frac{1}{16}$, dass

$$f(x) = a\,x + \frac{1}{8} = \frac{1}{16}\,x + \frac{1}{8} \geq \frac{1}{8} \geq 0$$

für $x \in [0,4]$.

F3. (c). Lediglich (c) ist korrekt, da jede auf $[a,b]$ differenzierbare Funktion f auch stetig auf $[a,b]$ ist, und folglich das bestimmte Integral von f über $[a,b]$ existiert. Andersherum kann allerdings aus der Existenz des bestimmten Integrals von f über $[a,b]$ nicht auf die Stetigkeit von f auf $[a,b]$ geschlossen werden.

F4. (b). Wegen

$$\det(C) = \det(A^{-1})\,\det(B)\,\det(A) = \frac{1}{\det(A)}\,\det(B)\,\det(A) = \det(B) = 2,$$

folgt:

$$\det(C^n) = (\det(C))^n = 2^n.$$

F5. (c). Wegen $\det([\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}]) = -6 \neq 0$ ist das System von Vektoren $\{\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}\}$ linear unabhängig und demnach eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Damit lässt sich $\mathbf{d}$ für alle $t \in \mathbb{R}$ als Linearkombination von $\mathbf{a},\mathbf{b},\mathbf{c}$ darstellen.

F6. (a). Da das System mindestens eine Lösung hat, muss gelten, dass $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b})$. Weiterhin schliessen wir mit dem Wissen, dass die Dimension des Lösungsraumes gleich $2 = 5 - \mathrm{rg}(A)$ ist, auf $3 = \mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A, \mathbf{b})$.

F7. (b). Zunächst vereinfachen wir $f(x) = \ln(x\, e^x) = \ln(x) + \ln(e^x) = \ln(x) + x$. Weiter gilt:

$$\left(x \, \ln(x) + \frac{x^2}{2} - x\right)' = \ln(x) + x\,\frac{1}{x} + x - 1 = \ln(x) + x = f(x).$$

Wir erhalten:

$$\int \ln(x\, e^x)\, dx = x \, \ln(x) + \frac{x^2}{2} - x + C.$$

Zudem kann man leicht zeigen, dass die Funktionen in den Antworten (a) und (c) *keine* Stammfunktionen von f sind.

F8. (a). λ ist ein Eigenwert von A genau dann, wenn $\det(A - \lambda\, I) = 0$. Es gilt:

$$0 = \det(A - \lambda\, I) = \left| \begin{pmatrix} 2-\lambda & a \\ a & 2-\lambda \end{pmatrix} \right| = (2-\lambda)^2 - a^2 \Leftrightarrow 2 - \lambda = \pm|a| \Leftrightarrow \lambda = 2 \pm |a|.$$

Folglich hat A zwei verschiedene reellwertige Eigenwerte genau dann, wenn $a \neq 0$.

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
Frage 1	☒	☐	☐	☐
Frage 2	☐	☐	☒	☐
Frage 3	☒	☐	☐	☐
Frage 4	☐	☒	☐	☐
Frage 5	☐	☐	☒	☐
Frage 6	☐	☒	☐	☐
Frage 7	☐	☐	☒	☐
Frage 8	☒	☐	☐	☐

F1. (a). Wegen $2\,\sin(x)\,\cos(x) = \sin(2\,x)$ gilt:

$$\int_0^\pi 2\,\sin(x)\,\cos(x)\,dx = \int_0^\pi \sin(2\,x)\,dx.$$

Aufgrund der Symmetrie des Graphen von $\sin(2\,x)$ schliessen wir auf:

$$\int_0^\pi \sin(2\,x)\,dx = 0.$$

Alternativ erhalten wir mittels der Substitution $u = \sin(x)$:

$$\int_0^\pi 2\,\sin(x)\,\cos(x)\,dx = \int_0^0 2\,u\,du = \left[u^2\right]_0^0 = \left[(\sin(x))^2\right]_0^0 = 0.$$

F2. (c). $\mathbf{u}$ ist orthogonal zu $\mathbf{v}$ genau dann, wenn

$$\begin{aligned} &\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = 0 \\ &\quad\Leftrightarrow\quad (t-2) + t\,(t-1) + 27 = 0 \\ &\quad\Leftrightarrow\quad t^2 + 25 = 0. \end{aligned}$$

Diese Gleichung kann in $\mathbb{R}$ nie erfüllt sein. Demnach ist $\mathbf{u}$ für kein $t \in \mathbb{R}$ orthogonal zu $\mathbf{v}$.

F3. (a). Wir verwenden das Gauß-Verfahren:

$$A \;=\; \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & -5 & -7 & 13 & -10 \\ -1 & 3 & 5 & -7 & 4 \\ -2 & 10 & 18 & -22 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ -3\,(I) \\ +(I) \\ +2\,(I) \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -8 & -16 & 16 & -4 \\ 0 & 4 & 8 & -8 & 2 \\ 0 & 12 & 24 & -24 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ :(-8) \\ \\ \\ \end{matrix}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0.5 \\ 0 & 4 & 8 & -8 & 2 \\ 0 & 12 & 24 & -24 & 6 \end{pmatrix} \begin{array}{l} -(II) \\ \\ -4\,(II) \\ -12\,(II) \end{array}$$

$$A^\star = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 & -2.5 \\ 0 & 1 & 2 & -2 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $\mathrm{rg}(A^\star) = 2$ und folglich $\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(A^\star) = 2$.

F4. (b). Da die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

invertierbar ist (die Determinante der Matrix ist 1 und damit ungleich 0), folgt:

$$X = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 4 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -5 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

F5. (c). Sei λ_i ein Eigenwert von A mit Eigenvektor $\mathbf{x}_i$. Es folgt:

$$A^2\,\mathbf{x}_i = A\,(A\,\mathbf{x}_i) = A(\lambda_i\,\mathbf{x}_i) = \lambda_i\,A\,\mathbf{x}_i = \lambda_i\,(\lambda_i\,\mathbf{x}_i) = \lambda_i^2\,\mathbf{x}_i.$$

Damit ist λ_i^2 Eigenwert von A^2 mit Eigenvektor $\mathbf{x}_i$.

Im Gegensatz dazu sind λ_i und $2\,\lambda_i$ im Allgemeinen keine Eigenwerte von A^2. Sei beispielsweise $A = 3\,I$, d.h., A ist die Diagonalmatrix mit Diagonalelementen gleich 3. Der einzige Eigenwert von A ist dann $\lambda = 3$. Wegen $A^2 = 9\,I$ ist der einzige Eigenwert von A^2 gleich $9 = 3^2 = \lambda^2$.

F6. (b). Die Antworten (c) und (d) erfüllen die Bedingung $y_0 = 2$ nicht. Für Antwort (a) gilt:

$$y_{k+1} - (1+a)\,y_k = 2\,(1+a)^{k+1} - (1+a)\,2\,(1+a)^k = 0 \neq a.$$

Antwort (b) dagegen erfüllt $y_0 = 2$ und

$$y_{k+1} - (1+a)\,y_k = 2\,(1+a)^{k+1} - 1 - (1+a)\,(3\,(1+a)^k - 1) = 3\,(1+a)^{k+1} - 1 - 3\,(1+a)^{k+1} + 1 + a = a.$$

Alternativ löst man das Anfangswertproblem (Normalform)

$$y_{k+1} = \underbrace{(1+a)}_{=A}\,y_k + \underbrace{a}_{=B}, \qquad y_0 = 2$$

und erhält

$$y^\star = \frac{B}{1-A} = \frac{a}{1-(1+a)} = -1$$

sowie

$$y_{k+1} = A^k\,(y_0 - y^\star) + y^\star = (1+a)^k\,(2+1) + (-1) = 3\,(1+a)^k - 1.$$

Dies entspricht der Folge in Antwort (b).

F7. (c). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{1}{3}\,y_k + 5.$$

Es folgt $A = \frac{1}{3}$ und $B = 5$. Wegen $A > 0$ und $|A| < 1$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung monoton und konvergent.

F8. (a). Die Normalform der Differenzengleichung lautet:

$$y_{k+1} = \frac{c-1}{c+2}\,y_k + \frac{5}{c+2},$$

d.h., $A = \frac{c-1}{c+2}$ und $B = \frac{5}{c+2}$. Wegen $B \neq 0$ ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung divergent und monoton genau dann, wenn $A > 1$. Es gilt:

Fall 1: $c + 2 > 0 \Leftrightarrow c > -2$:

$$A > 1 \Leftrightarrow \frac{c-1}{c+2} > 1 \Leftrightarrow c - 1 > c + 2 \Leftrightarrow -1 > 2 \;\rightarrow\; \text{unmöglich.}$$

Fall 2: $c + 2 < 0 \Leftrightarrow c < -2$:

$$A > 1 \Leftrightarrow \frac{c-1}{c+2} > 1 \Leftrightarrow c - 1 < c + 2 \Leftrightarrow -1 < 2 \;\rightarrow\; \text{allgemein gültig.}$$

Demnach ist die allgemeine Lösung der Differenzengleichung divergent und monoton genau dann, wenn $c < -2$.