Mathematik A
Nachholprüfung Herbstsemester 2016

Dr. Reto Schuppli*

13. Juli 2017

Teil I: Offene Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für offene Fragen:

(i) Ihre Antworten müssen alle Rechenschritte enthalten, diese müssen klar ersichtlich sein. Verwendung von korrekter mathematischer Notation wird erwartet und fliesst in die Bewertung ein.

(ii) Ihre Antworten zu den jeweiligen Teilaufgaben müssen in den dafür vorgesehenen Platz geschrieben werden. Sollte dieser Platz nicht ausreichen, setzen Sie Ihre Antwort auf der Rückseite oder dem separat zur Verfügung gestellten Papier fort. Verweisen Sie in solchen Fällen ausdrücklich auf Ihre Fortsetzung. Bitte schreiben Sie zudem Ihren Vor- und Nachnamen auf jeden separaten Lösungsbogen.

(iii) Es werden nur Antworten im dafür vorgesehenen Platz bewertet. Antworten auf der Rückseite oder separatem Papier werden nur bei einem vorhandenen und klaren Verweis darauf bewertet.

(iv) Die Teilaufgaben werden mit den jeweils oben auf der Seite angegebenen Punkten bewertet.

(v) Ihre endgültige Lösung jeder Teilaufgabe darf nur eine einzige Version enthalten.

(vi) Zwischenrechnungen und Notizen müssen auf einem getrennten Blatt gemacht werden. Diese Blätter müssen, deutlich als Entwurf gekennzeichnet, ebenfalls abgegeben werden.

Aufgabe 1 (26 Punkte)

(a) (6 Punkte)

Für welche Werte von a und b ($a, b \in \mathbb{R}_{++}$) konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1-b}{1+2a} \right)^k ?$$

Stellen Sie die Lösungsmenge graphisch (in einem (a,b)-System) dar.
Ermitteln Sie den zugehörigen Grenzwert.

Aufgabe 1

(a) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(b) (6 Punkte)

Eine nachschüssige 16-jährige Rente von CHF 30'000 (es werden also 16 Jahre lang am Jahresende CHF 30'000 ausbezahlt) soll in eine zehnjährige vorschüssige Rente (10 Jahre lang wird am Anfang des Jahres der gleiche Betrag B ausbezahlt) umgewandelt werden. Der Zinssatz beträgt $i = 5\%$.

Welcher Betrag B wird jährlich ausbezahlt?

Aufgabe 1

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(c) (4 Punkte)

Berechnen Sie

$$\lim_{t \to 2} \frac{\sqrt{t+2} - \sqrt{2t}}{\sqrt{t+4} - \sqrt{3t}}.$$

Aufgabe 1

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 1

(d1) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : D_f \to \mathbb{R},\ x \mapsto y = e^{1-\ln(\sqrt{4-x})}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f und den Wertebereich W_f von f.

Aufgabe 1

(d2) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R},\; x \mapsto y = e^{1-\ln(\sqrt{4-x})}.$$

Ist f streng monoton (Beweis)?

Aufgabe 1

(d3) (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,D_f \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = e^{1-\ln(\sqrt{4-x})}.$$

Ermitteln Sie die Umkehrfunktion f^{-1} von f.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

(a1) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,[0,\infty]\to\mathbb{R},\quad x\mapsto y=\sqrt[4]{1+x}=(1+x)^{\frac{1}{4}}.$$

Bestimmen Sie das Taylorpolynom $P_3(x)$ 3. Ordnung von f im Punkt $x_0=0$.

Benützen Sie $P_3(x)$, um einen Näherungswert für $\sqrt[4]{1.5}$ zu bestimmen!

Aufgabe 2

(a1) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(a2) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f\,:\,[0,\infty] \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto y = \sqrt[4]{1+x} = (1+x)^{\frac{1}{4}}.$$

$R_3(x)$ bezeichne das Restglied 3. Ordnung von f in x_0.

Berechnen Sie $R_3(0.5)$ auf 4 Nachkommastellen genau. Verwenden Sie dazu die Definition des Restgliedes.

Zeigen Sie, dass für $x \in [0,1]$ gilt:

$$|R_3(x)| < 0.04.$$

Aufgabe 2

(b) (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \ln(x^2 + 4y^2 - 4) + \frac{y - 2}{\sqrt{9 - x^2 - 9y^2}}.$$

Ermitteln Sie den Definitionsbereich D_f von f und stellen Sie diesen graphisch dar.

Aufgabe 2

(b) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(c) (6 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = x^3 + axy + by^2 + c.$$

Für welche Werte der Parameter a, b, $c \in \mathbb{R}$ ist die Gleichung der Tangentialebene Γ an den Graph von f im Punkt $P = (2, -1, z_0)$ gegeben durch

$$\Gamma: \; 5x - y - \frac{1}{2}z - 7 = 0\,?$$

Aufgabe 2

(c) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Aufgabe 2

(d) (6 Punkte)

Die Funktion $f(x, y)$ ist definiert für $x > 0$ und $y > 0$ und ist homogen vom Grad $k = 2$. Die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ sind

$$f_x(x, y) = \frac{2}{x^3} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)^{-2} + 2x$$

und

$$f_y(x, y) = \frac{2}{y^3} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)^{-2} + 2y.$$

Ermitteln Sie $f(x, y)$ und vereinfachen Sie den Funktionsterm.

Aufgabe 2

(d) (Zusätzlicher Lösungsplatz)

Teil II: Multiple-Choice-Fragen (50 Punkte)

Allgemeine Anweisungen für Multiple-Choice-Fragen:

(i) Die Antworten auf die Multiple-Choice-Fragen müssen im dafür vorgesehenen Antwortbogen eingetragen werden, welcher zusammen mit den Prüfungsaufgaben ausgehändigt wird. Es werden ausschliesslich Antworten auf diesem Antwortbogen bewertet. Der Platz unter den Fragen ist nur für Notizen vorgesehen und wird nicht korrigiert.

(ii) Jede Frage hat nur eine richtige Antwort. Es muss also auch jeweils nur eine Antwort angekreuzt werden.

(iii) Falls mehrere Antworten angekreuzt sind, wird die Antwort mit 0 Punkten bewertet, auch wenn die korrekte Antwort unter den angekreuzten ist.

(iv) Bitte lesen Sie die Fragen sorgfältig.

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Frage 1 (2 Punkte)

Die Aussage $B \Rightarrow A \wedge B$ hat die Wahrheitstabelle

(a)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$B \Rightarrow A \wedge B$	W	F	F	F

(b)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$B \Rightarrow A \wedge B$	W	W	W	W

(c)

A	W	W	F	F
B	W	F	W	F
$B \Rightarrow A \wedge B$	W	W	F	W

(d) Keine der obigen Wahrheitstabellen ist korrekt.

Aufgabe 3

Frage 2 (3 Punkte)

Gegeben ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \left(1 - \frac{1}{2n}\right)^{3n}.$$

(a) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert 0.

(b) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert $\frac{1}{\sqrt{e^3}}$.

(c) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ hat den Grenzwert $e^{1.5}$.

(d) $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist divergent.

Aufgabe 3

Frage 3 (3 Punkte)

Der Grenzwert

$$\lim_{x \to 1} \frac{(x-1)^2}{1+\cos(\pi\, x)}$$

ist

(a) 2.

(b) $-\frac{\pi}{2}$.

(c) $\frac{\pi}{2}$.

(d) $\frac{2}{\pi^2}$.

Aufgabe 3

Frage 4 (3 Punkte)

Ein Investor hat die Wahl zwischen zwei Projekten:
Projekt I erfordert jetzt eine Investition von CHF 180′000 und bringt in 2 Jahren CHF 220′000.
Projekt II erfordert jetzt eine Investition von CHF 200′000 und bringt in 2 Jahren CHF 240′000.
Für welche jährlichen Zinssätze $i > 0$ ist das Projekt I dem Projekt II vorzuziehen?

Projekt I ist Projekt II vorzuziehen

(a) nur für $i < 10\%$.

(b) nur für $i > 10\,\%$.

(c) für alle $i > 0$.

(d) für kein $i > 0$.

Aufgabe 3

Frage 5 (3 Punkte)

Die Gleichung

$$2 \log_a(x) = 3 \log_a(4)$$

hat (für $x \in \mathbb{R}_{++}$) folgende Lösungsmenge:

(a) $\{6\}$.

(b) $\{8\}$.

(c) $\{\sqrt[3]{16}\}$.

(d) Die Lösungsmenge ist abhängig von der Basis $a \in \mathbb{R}_{++} \setminus \{1\}$.

Aufgabe 3

Frage 6 (4 Punkte)

Wir betrachten die Funktion

$$f\,:\,\mathbb{R}\to\mathbb{R},\quad x\mapsto y=\begin{cases}\frac{\sin(x)-\cos(x)}{a\,(x-\frac{\pi}{4})} & \text{für } x\neq\frac{\pi}{4}\\ 1 & \text{für } x=\frac{\pi}{4}\end{cases}.$$

Für welches $a\in\mathbb{R}$ ist f überall stetig?

(a) $a=-\frac{4}{\pi}$.

(b) $a=\sqrt{2}$.

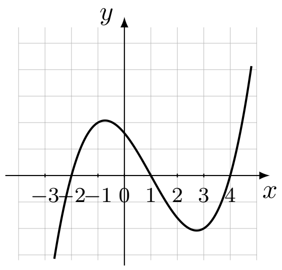
(c) $a=1$.

(d) f ist für kein $a\in\mathbb{R}$ überall stetig.

Aufgabe 3

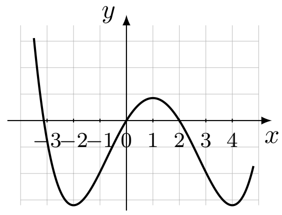
Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben ist der Graph der Ableitung f' der Funktion f.

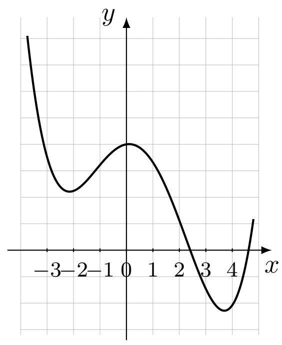


Welcher der folgenden Graphen zeigt die Abbildung f?

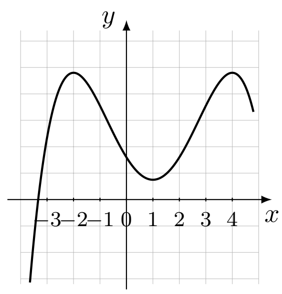
(a)



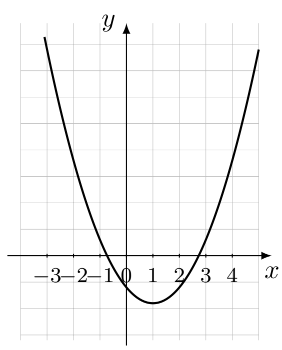
(b)



(c)



(d)



Aufgabe 3

Frage 8 (3 Punkte)

Für eine Funktion f ist die relative Änderungsrate $\rho_f(t)$:

$$\rho_f(t) = t\,\ln(t) + e^{4t}.$$

Dann gilt für die Elastizität $\varepsilon_f(t)$ von f:

(a) $\varepsilon_f(t) = \ln(t) + \frac{e^{4t}}{t}$.

(b) $\varepsilon_f(t) = t^2\,\ln(t) + t\,e^{4t}$.

(c) $\varepsilon_f(t) = \ln(t) + 1 + 4\,e^{4t}$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Aufgabe 4 (26 Punkte)

Frage 1 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto f(x) = x^2\, e^{-x}.$$

(a) f ist elastisch für $x > 0$.

(b) f ist elastisch für $x < 2$ und unelastisch für $x > 2$.

(c) f ist unelastisch für $x > 1$ und elastisch für $x < 1$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Aufgabe 4

Frage 2 (4 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f : \mathbb{R}_{++} \to \mathbb{R}_{++}, \quad x \mapsto f(x) = x^e + x\,e^x.$$

(a) f hat einen Wendepunkt in $x_0 = 1$.

(b) f hat einen Wendepunkt in $x_0 = \sqrt{e}$.

(c) f hat einen Wendepunkt in $x_0 = e$.

(d) f hat keinen Wendepunkt.

Aufgabe 4

Frage 3 (4 Punkte)

Für welches $a \in \mathbb{R}$ ist

$$P_4(x) = \frac{13}{24}\,x^4 + \frac{7}{6}\,x^3 + a\,x^2 + x + 1$$

das Taylorpolynom 4. Ordnung der Funktion

$$f(x) = (x^2 + 1)e^x$$

im Punkt $x_0 = 0$?

Es ist

(a) $a = 1$.

(b) $a = \frac{3}{2}$.

(c) $a = 2$.

(d) $a = 3$.

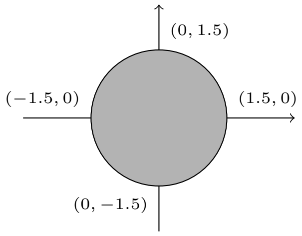
Aufgabe 4

Frage 4 (4 Punkte)

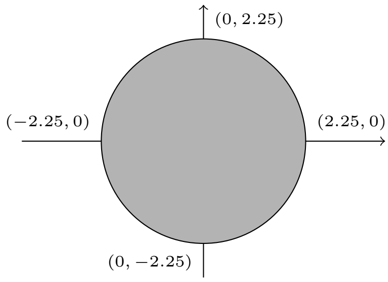
Gegeben ist die Funktion
$$f(x, y) = \sqrt{9 - 4x^2 - 4y^2}.$$

Welche Graphik zeigt den Definitionsbereich von f?

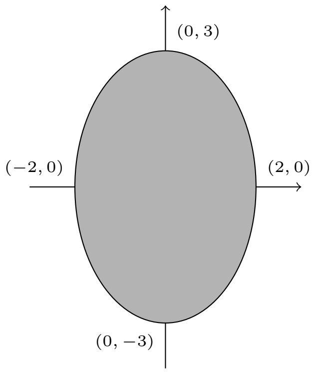
(a)



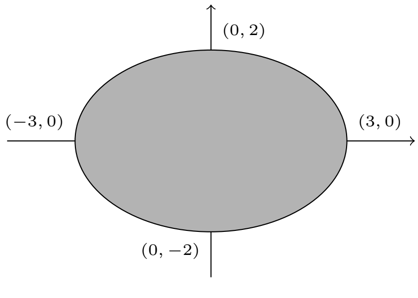
(b)



(c)



(d)



Aufgabe 4

Frage 5 (2 Punkte)

Die Funktion $\varphi : D_\varphi \to \mathbb{R}$, $D_\varphi \subset \mathbb{R}^2$, sei stetig und $\varphi(x_0, y_0) = 0$. Ausserdem sei φ stetig differenzierbar. Dafür, dass es ein offenes Intervall $I \subset \mathbb{R}$ mit $x_0 \in I$ und eine stetig differenzierbare Funktion $f : I \to \mathbb{R}$ mit $\varphi(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in I$ gibt, ist hinreichend, dass

(a) $\varphi_x(x_0, y_0) \neq 0$.

(b) $\varphi_x(x_0, y_0) = 0$ und $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$.

(c) $\varphi_x(x_0, y_0) = 0$ oder $\varphi_y(x_0, y_0) = 0$.

(d) Keine der obigen Antworten ist richtig.

Aufgabe 4

Frage 6 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x,y) = 8\left(\frac{5}{x^2} + \frac{1}{5xy}\right)^{-0.5} \quad (x > 0,\, y > 0).$$

(a) f ist homogen vom Grad -0.5.

(b) f ist homogen vom Grad 0.5.

(c) f ist linear homogen.

(d) f ist nicht homogen.

Aufgabe 4

Frage 7 (3 Punkte)

Gegeben ist die Funktion

$$f(x, y) = \frac{e^x}{e^{x-1}} \left(1 + \frac{4y}{x}\right) \left(\sqrt{7\,x^2 + xy}\right) \quad (x > 0,\; y > 0).$$

(a) f ist homogen vom Grad 0.

(b) f ist linear homogen.

(c) f ist homogen vom Grad 2.

(d) f ist nicht homogen.

Aufgabe 4

Frage 8 (3 Punkte)

Für welchen Wert von $a \in \mathbb{R}$ ist die Funktion

$$f(x, y) = x^{a-1}y^{a+6} + \sqrt{x^2 + y^2} \quad (x > 0,\ y > 0)$$

homogen?

(a) f ist homogen für $a = 0$.

(b) f ist homogen für $a = 1$.

(c) f ist homogen für $a = -2$.

(d) f ist für kein $a \in \mathbb{R}$ homogen.