Mathematik A
Musterlösung Nachholprüfung Herbstsemester 2016

Prof. Dr. Enrico De Giorgi[1]

13. Juli 2017

[1]Fachbereich für Mathematik und Statistik, Universität St. Gallen, Bodanstrasse 6, 9000 St. Gallen, Schweiz, email: enrico.degiorgi@unisg.ch.

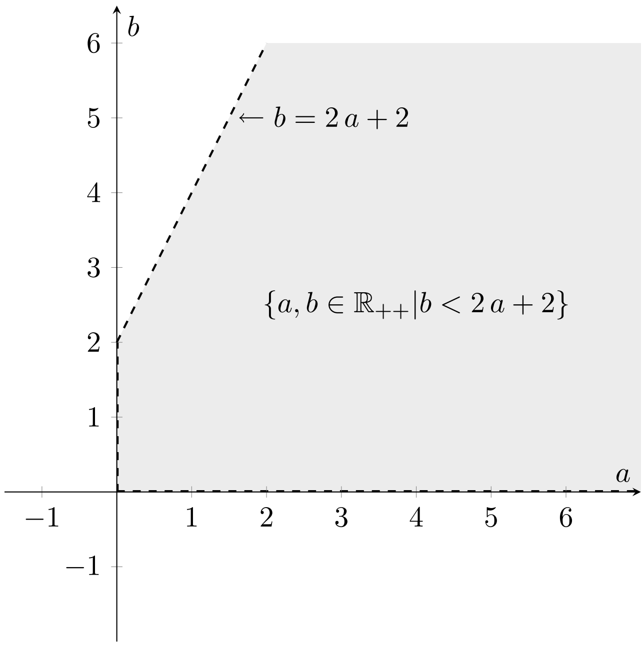
Teil I: Offene Fragen

Aufgabe 1

(a) (**6 Punkte**).

Die Reihe $\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1-b}{1+2\,a}\right)^t$ ist eine geometrische Reihe mit $q=\frac{1-b}{1+2\,a}$. Daher konvergiert sie genau dann, wenn $|q|<1$. Es folgt:

$$
\begin{aligned}
|q|<1 \quad &\Leftrightarrow \quad \left|\frac{1-b}{1+2\,a}\right|<1 \\
&\Leftrightarrow \quad -1<\frac{1-b}{1+2\,a}<1 \\
&\overset{1+2\,a>0}{\Leftrightarrow} \quad -1-2\,a< \underbrace{1-b<1+2\,a}_{\text{wahr für alle } a,b\in\mathbb{R}_{++}} \\
&\overset{a,b\in\mathbb{R}_{++}}{\Leftrightarrow} \quad 0<b<2\,a+2.
\end{aligned}
$$



Für $b<2\,a+2$ und $a,b\in\mathbb{R}_{++}$ folgt:

$$\sum_{t=0}^{\infty}\left(\frac{1-b}{1+2\,a}\right)^t=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{1-\frac{1-b}{2\,a+1}}=\frac{2\,a+1}{2\,a+b}.$$

(b) (**6 Punkte**).
Die regelmässigen, konstanten Zahlungen über $C^I = 30'000$ CHF stellen eine nachschüssige 16-jährige Rente dar. Der Wert dieser Rente ist demnach nach 16 Jahren:

$$\begin{aligned} A_{16}^I &= C^I \frac{(1+i)^n - 1}{i} \\ &= 30'000 \, \frac{1,05^{16} - 1}{0,05} \\ &\approx 709'724,75 \text{ (CHF)}, \end{aligned}$$

und ihr Barwert entspricht:

$$P_{10}^I = \frac{A_{16}^I}{(1+0,05)^{16}} = \frac{30'000}{0,05} \, \frac{1,05^{16} - 1}{1,05^{16}} \approx 325'133,10 \text{ (CHF)}.$$

Die konstanten Zahlungen B am Anfang jeden Jahres über 10 Jahre entsprechen dagegen einer 10-jährigen vorschüssigen Rente mit Barwert:

$$P_{10}^D = \frac{B}{0,05} \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{1,05^{10}}.$$

Aus der Gleichung $P_{16}^I = P_{10}^D$ folgt:

$$\frac{30'000}{0,05} \, \frac{1,05^{16} - 1}{1,05^{16}} = \frac{B}{0,05} \cdot 1,05 \cdot \frac{1,05^{10} - 1}{1,05^{10}}.$$

Damit gilt:

$$B = \frac{30'000}{1,05^7} \, \frac{1,05^{16} - 1}{1,05^{10} - 1} \approx 40'101,15 \text{ (CHF)}.$$

(c) (**4 Punkte**).

Es gilt:

$$\begin{aligned} &\lim_{t \to 2} \frac{\sqrt{t+2} - \sqrt{2\,t}}{\sqrt{t+4} - \sqrt{3\,t}} \\ &\overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{t \to 2} \frac{\frac{1}{2\sqrt{t+2}} - \frac{1}{\sqrt{2\,t}}}{\frac{1}{2\sqrt{t+4}} - \frac{3}{2\sqrt{3\,t}}} \\ &= \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{2}}{\frac{1}{2\sqrt{6}} - \frac{3}{2\sqrt{6}}} \\ &= \frac{-\frac{1}{4}}{-\frac{2}{2\sqrt{6}}} \\ &= \frac{\sqrt{6}}{4}. \end{aligned}$$

(d1) (**4 Punkte**).

$$x \in D_f \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \sqrt{4-x} > 0 & \text{(wegen des } \ln(\cdot)\text{)} \\ 4-x \geq 0 & \text{(wegen der } \sqrt{(\cdot)}\text{)} \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \quad 4-x > 0$$
$$\Leftrightarrow \quad x < 4.$$

Daher erhalten wir:

$$D_f = (-\infty, 4).$$

Ausserdem gilt

$$\begin{aligned} -\infty < x < 4 \quad &\Leftrightarrow \quad 0 < \sqrt{4-x} < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad -\infty < \ln(\sqrt{4-x}) < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad -\infty < 1 - \ln(\sqrt{4-x}) < \infty \\ &\Leftrightarrow \quad 0 < e^{1-\ln(\sqrt{4-x})} < \infty \end{aligned}$$

und wir erhalten:

$$W_f = \mathbb{R}_{++}.$$

(d2) (**3 Punkte**).
Da f eine differenzierbare Funktion ist, können wir die erste Ableitung von f nutzen, um die Monotonieeigenschaften von f zu untersuchen. Wir wenden die Kettenregel an und erhalten:

$$f'(x) = \underbrace{e^{1-\ln(\sqrt{4-x})}}_{>0} \underbrace{\left(-\frac{1}{\sqrt{4-x}}\right)}_{<0} \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{4-x}}}_{>0} \underbrace{(-1)}_{<0} > 0.$$

Daher gilt $f'(x) > 0$ für alle $x \in D_f$ und folglich ist f streng monoton steigend im gesamten Definitionsbereich.

(d3) (**3 Punkte**).
Für $y \in W_f$ gilt:

$$\begin{aligned} & y = e^{1-\ln(\sqrt{4-x})} = e^1 \cdot e^{-\ln(\sqrt{4-x})} = \frac{e}{\sqrt{4-x}} \\ \Leftrightarrow \quad & \frac{e}{y} = \sqrt{4-x} \\ \Leftrightarrow \quad & 4-x = \frac{e^2}{y^2} \\ \Leftrightarrow \quad & x = 4 - \frac{e^2}{y^2}. \end{aligned}$$

Wegen $D_{f^{-1}} = W_f$ und $W_{f^{-1}} = D_f$ folgt:

$$f^{-1} : \mathbb{R} \to (-\infty, 4), \quad x \mapsto y = f^{-1}(x) = 4 - \frac{e^2}{x^2}.$$

Aufgabe 2

(a1) (**4 Punkte**).
Das Taylorpolynom dritter Ordnung von f in x_0 ist definiert als:

$$P_3(x) = f(x_0) + f'(x_0)\,(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}\,(x - x_0)^2 + \frac{f'''(x_0)}{3!}\,(x - x_0)^3.$$

Mit $x_0 = 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(x_0) &= f(0) = (1+0)^{\frac{1}{4}} = 1 \\
f'(x) &= \frac{1}{4}\,(1+x)^{-\frac{3}{4}} \Rightarrow f'(x_0) = f'(0) = \frac{1}{4} \\
f''(x) &= -\frac{3}{16}\,(1+x)^{-\frac{7}{4}} \Rightarrow f''(x_0) = f''(0) = -\frac{3}{16} \\
f'''(x) &= \frac{21}{64}\,(1+x)^{-\frac{11}{4}} \Rightarrow f'''(x_0) = f'''(0) = \frac{21}{64}.
\end{aligned}$$

Daraus folgt:

$$P_3(x) = 1 + \frac{1}{4}\,x - \frac{3}{32}\,x^2 + \frac{7}{128}\,x^3.$$

Ausserdem erhalten wir:

$$\sqrt[4]{1.5} = f(0,5) \approx P_3(0.5) = \frac{1135}{1024} \approx 1,108398.$$

(a2) (**4 Punkte**).
Zunächst berechnen wir mit der Definition des Restgliedes:

$$R_3(0,5) = f(0,5) - P_3(0,5) = \sqrt[4]{0,5} - \frac{1135}{1024} \approx 0,0017$$

Weiterhin gilt nach dem Satz von Taylor:

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(\xi)}{4!}\,x^4$$

für ein $\xi \in [0, x]$.

Es gilt:

$$f^{(4)}(x) = -\frac{231}{256}\,(1+x)^{-\frac{15}{4}}.$$

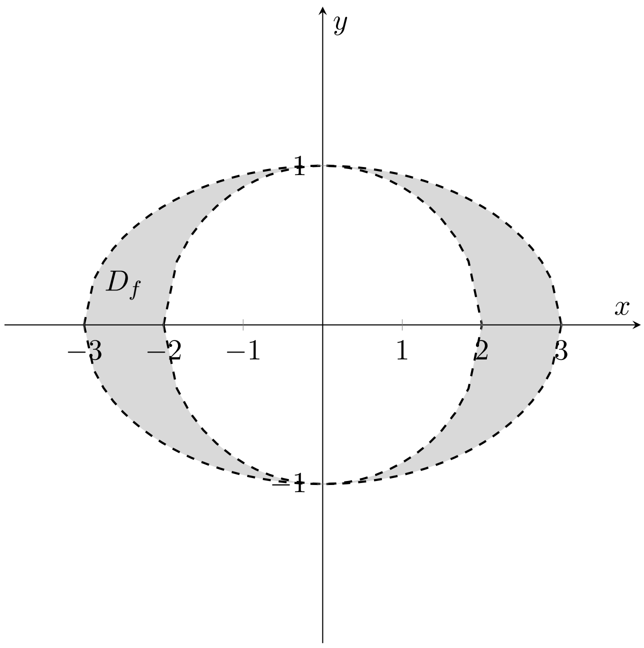
Daraus folgt für $x \in [0,1]$,

$$\begin{aligned}
|R_3(x)| &= \frac{\left|f^{(4)}(\xi)\right|}{4!}\, x^4 \\
&= \frac{1}{4!}\,\frac{231}{256}\,(1+\xi)^{\frac{-15}{4}}\, x^4 \\
&= \frac{77}{2048}\quad \underbrace{(1+\xi)^{\frac{-15}{4}}}_{\leq 1 \text{ für } \xi \in [0,1]}\quad \underbrace{x^4}_{\leq 1 \text{ für } x \in [0,1]} \\
&\leq \frac{77}{2048} \\
&\approx 0,037 < 0,04.
\end{aligned}$$

(b) (**4 Punkte**).
Es gilt:

$$x \in D_f \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} x + 4\,y^2 - 4 > 0 \\ 9 - x^2 - 9\,y^2 > 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{x^2}{2^2} + \frac{y^2}{1^2} > 1 \ (I) \\ \frac{x^2}{3^2} + \frac{y^2}{1^2} < 1 \ (II) \end{array} \right. .$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb einer Ellipse (II) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a = 3$ und $b = 1$ geschnitten mit der Fläche ausserhalb einer Ellipse (I) mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Halbachsen $a = 2$ und $b = 1$. Die folgende Abbildung zeigt den Definitionsbereich von f:



(c) (**6 Punkte**).
Die Ebene Γ erfüllt die Koordinatengleichung

$$\Gamma \,:\, z = 10\,x - 2\,y - 14.$$

Wir definieren die Funktion g durch $g(x,y) = 10\,x - 2\,y - 14$, sodass gilt

$$\Gamma \,:\, z = g(x,y).$$

Die folgenden drei Bedingungen müssen erfüllt sein:

(i) $P = (2,-1,z_0)$ liegt in der Ebene Γ, d.h. $z_0 = g(-2,1) = 8$.

(ii) $P = (2,-1,z_0)$ gehört zum Graphen von f, d.h.

$$z_0 = f(2,-1) = 2^3 + a\cdot 2\cdot(-1) + b\cdot(-1)^2 + c \Leftrightarrow 8 = 8 - 2\,a + b + c \Leftrightarrow c = 2\,a - b.$$

(iii) Die partiellen Ableitungen der Funktionen f und g haben im Punkt $(x_0,y_0) = (2,-1)$ denselben Wert. Es gilt:

$$f_x(x,y) = 3\,x^2 + a\,y$$

und

$$g_x(x,y) = 10.$$

Folglich erhalten wir:

$$f_x(2,-1) = g_x(2,-1) \Leftrightarrow 12 - a = 10 \Leftrightarrow a = 2.$$

Genauso gilt:

$$f_y(x,y) = a\,x + 2\,b\,y$$

und

$$g_y(x,y) = -2.$$

Wir berechnen:

$$f_y(2,-1) = g_y(2,-1) \Leftrightarrow 2\,a - 2\,b = -2 \Leftrightarrow 2\,b = 2\,a + 2 \overset{a=2}{\Leftrightarrow} b = 3.$$

Aus (ii) folgt schliesslich $c = 1$.

(d) (**6 Punkte**).
Da f homogen vom Grad 2 ist, folgt mit der Eulerschen Relation:

$$x\, f_x(x,y) + y\, f_y(x,y) = 2\, f(x,y).$$

Aus

$$f_x(x,y) = \frac{2}{x^3} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)^{-2} + 2\,x$$

und

$$f_y(x,y) = \frac{2}{y^3} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)^{-2} + 2\,y$$

folgt:

$$\begin{aligned}
2\, f(x,y) &= x\, f_x(x,y) + y\, f_y(x,y) \\
&= x \left[\frac{2}{x^3} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)^{-2} + 2\,x \right] + y \left[\frac{2}{y^3} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)^{-2} + 2\,y \right] \\
&= \frac{2}{x^2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)^{-2} + \frac{2}{y^2} \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)^{-2} + 2\,x^2 + 2\,y^2 \\
&= 2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right) \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)^{-2} + 2\,x^2 + 2\,y^2 \\
&= 2 \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)^{-1} + 2\,x^2 + 2\,y^2.
\end{aligned}$$

Wir erhalten demnach:

$$f(x,y) = \left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} \right)^{-1} + x^2 + y^2.$$

Teil II: Multiple-Choice-Fragen

Aufgabe 3

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☒	☐
2.	☐	☒	☐	☐
3.	☐	☐	☐	☒
4.	☐	☐	☒	☐
5.	☐	☒	☐	☐
6.	☐	☒	☐	☐
7.	☒	☐	☐	☐
8.	☐	☒	☐	☐

1. Die Antwort ist (c). Die Implikation $B \Rightarrow A \wedge B$ ist falsch genau dann, wenn B wahr und A falsch ist.

2. Die Antwort ist (b). Es gilt:

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{2\,n}\right)^{3\,n} &= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1-\frac{1}{2\,n}\right)^{n}\right]^{3} \\
&= \lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{(-0,5)}{n}\right)^{n}\right]^{3} \\
&= \left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{(-0,5)}{n}\right)^{n}\right]^{3} \\
&= \left(e^{-0,5}\right)^{3} \\
&= e^{-1,5} \\
&= \frac{1}{\sqrt{e^3}}.
\end{aligned}$$

3. Die Antwort ist (d). Es gilt:

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)^2}{1+\cos(\pi\,x)} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2\,(x-1)}{-\pi\,\sin(\pi\,x)} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x\to 1}\frac{2}{-\pi^2\,\cos(\pi\,x)} = \frac{2}{\pi^2}.$$

4. Die Antwort ist (c). Der Barwert von Projekt I ist $-180'000+\frac{220'000}{(1+i)^2}$. Der Barwert von Projekt II ist $-200'000+\frac{240'000}{(1+i)^2}$. Daher ist Projekt I dem Projekt II vorzuziehen, wenn

$$-180'000+\frac{220'000}{(1+i)^2} > -200'000+\frac{240'000}{(1+i)^2} \Leftrightarrow 20'000 > \frac{20'000}{(1+i)^2}.$$

Die letzte Ungleichung ist für alle $i>0$ erfüllt.

5. Die Antwort ist (b). Es gilt:

$$\begin{aligned} & 2\ \log_a(x) = 3\ \log_a(4) \\ \Leftrightarrow \quad & \log_a(x^2) = \log_a(4^3) \\ \Leftrightarrow \quad & x^2 = 4^3 = 2^6 \\ \overset{x \in \mathbb{R}_{++}}{\Leftrightarrow} \quad & x = 2^3 = 8. \end{aligned}$$

6. Die Antwort ist (b). Offensichtlich ist f stetig für $x \neq \frac{\pi}{4}$. Ausserdem gilt:

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\sin(x) - \cos(x)}{a\ \left(x - \frac{\pi}{4}\right)} \overset{\text{de l'Hôpital}}{=} \lim_{x \to \frac{\pi}{4}} \frac{\cos(x) + \sin(x)}{a} = \frac{\sqrt{2}}{a}.$$

Demnach ist f stetig in $x = \frac{\pi}{4}$ genau dann, wenn

$$\frac{\sqrt{2}}{a} = 1 \Leftrightarrow a = \sqrt{2}.$$

7. Die Antwort ist (a). f' is negativ genau dann, wenn f monoton fallend ist. Der einzige Graph mit dieser Eigenschaft ist (a).

8. Die Antwort ist b). Wegen $\varepsilon_f(t) = t\, \rho_f(t)$ gilt:

$$\varepsilon_f(t) = t\ (t\ \ln(t) + e^{4\,t}) = t^2\ \ln(t) + t\, e^{4\,t}.$$

Aufgabe 4

	(a)	(b)	(c)	(d)
1.	☐	☐	☒	☐
2.	☐	☐	☐	☒
3.	☐	☒	☐	☐
4.	☒	☐	☐	☐
5.	☐	☒	☐	☐
6.	☐	☐	☒	☐
7.	☐	☒	☐	☐
8.	☐	☐	☒	☐

1. Die Antwort ist (c). Wegen

$$\varepsilon_f(x) = x\,\frac{f'(x)}{f(x)} = x\,\frac{2\,x\,e^{-x} - x^2\,e^{-x}}{x^2\,e^{-x}} = \frac{(2-x)\,x^2\,e^{-x}}{x^2\,e^{-x}} = 2 - x,$$

ist $\varepsilon_f(x) > 1$ (elastisch) für alle $x < 1$ und $\varepsilon_f(x) < 1$ (unelastisch) für alle $x > 1$.

2. Die Antwort ist (d). Es gilt:

$$f'(x) = e\,x^{e-1} + (x+1)\,e^x$$

und

$$f''(x) = e\,(e-1)\,x^{e-2} + (x+2)\,e^x.$$

Da $f''(x) > 0$ für alle $x \in \mathbb{R}_{++}$ gilt, hat f keinen Wendepunkt.

3. Die Antwort ist (b). Es gilt:

$$P_4(x) = f(x_0)+f'(x_0)\,(x-x_0)+\frac{1}{2}\,f''(x_0)\,(x-x_0)^2+\frac{1}{3!}\,f'''(x_0)\,(x-x_0)^3+\frac{1}{4!}\,f^{(4)}(x_0)\,(x-x_0)^4.$$

Demnach muss die Bedingung

$$a = \frac{f''(0)}{2!}$$

erfüllt sein. Es gilt:

$$f'(x) = 2\,x\,e^x + (x^2+1)\,e^x = (x^2+2\,x+1)\,e^x$$

und

$$f''(x) = (2\,x+2)\,e^x + (x^2+2\,x+1)\,e^x = (x^2+4\,x+3)\,e^x.$$

Folglich ist $f''(0) = 3$ und

$$a = \frac{f''(0)}{2!} = \frac{3}{2}.$$

4. Die Antwort ist (a). Es gilt:

$$(x,y) \in D_f \Leftrightarrow 9 - 4\,x^2 - 4\,y^2 \geq 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 \leq \frac{9}{4} = \left(\frac{3}{2}\right)^2.$$

Dies entspricht der Fläche innerhalb eines Kreises mit Mittelpunkt $(0,0)$ und Radius $\frac{3}{2}$.

5. Die Antwort ist (b). Hinreichend ist nach dem Satz von der impliziten Funktion, Theorem 11.3, dass $\varphi_y(x_0, y_0) \neq 0$. Diese Bedingung wird lediglich in Antwort (b) aufgeführt.

6. Die Antwort ist (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\, x, \lambda\, y) &= 8 \left(\frac{5}{(\lambda\, x)^2} + \frac{1}{5\,\lambda\, x\, \lambda\, y} \right)^{-0{,}5} \\
&= 8 \left(\frac{5}{\lambda^2\, x^2} + \frac{1}{5\,\lambda^2\, x\, y} \right)^{-0{,}5} \\
&= 8 \left(\frac{1}{\lambda^2} \right)^{-0{,}5} \left(\frac{5}{x^2} + \frac{1}{5\, x\, y} \right)^{-0{,}5} \\
&= \lambda\, 8 \left(\frac{5}{x^2} + \frac{1}{5\, x\, y} \right)^{-0{,}5} \\
&= \lambda\, f(x, y).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f homogen vom Grad 1 bzw. linear homogen ist.

7. Die Antwort ist (b). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\, x, \lambda\, y) &= e \left(1 + \frac{4\,\lambda\, y}{\lambda\, x} \right) \sqrt{7\,(\lambda\, x)^2 + (\lambda\, x)\,(\lambda\, y)} \\
&= e \left(1 + \frac{4\, y}{x} \right) \sqrt{\lambda^2\,(7\, x^2 + x\, y)} \\
&= e \left(1 + \frac{4\, y}{x} \right) \lambda \sqrt{7\, x^2 + x\, y} \\
&= \lambda\, e \left(1 + \frac{4\, y}{x} \right) \sqrt{7\, x^2 + x\, y} \\
&= \lambda\, f(x, y).
\end{aligned}$$

Daraus folgt, dass f homogen vom Grad 1 bzw. linear homogen ist.

8. Die Antwort ist (c). Für $\lambda > 0$ gilt:

$$\begin{aligned}
f(\lambda\, x, \lambda\, y) &= (\lambda\, x)^{a-1}\,(\lambda\, y)^{a+6} + \sqrt{(\lambda\, x)^2 + (\lambda\, y)^2} \\
&= \lambda^{2\,a+5}\, x^{a-1}\, y^{a+6} + \lambda \sqrt{x^2 + y^2}
\end{aligned}$$

Daher ist f homogen genau dann, wenn $\lambda^{2\,a+5} = \lambda$, d.h., $2\,a + 5 = 1$. Es folgt $a = -2$.